Mat-1.2620 Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

3. harjoitukset / Tehtävät

Demo-tehtävät: 1, 3, 4, 6
Pistetehtävät: 2, 5, 7, 8

Aiheet: **Verkot ja todennäköisyyslaskenta**
Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat
Kertymäfunktio
Jakaumien tunnusluvut

Avainsanat:

Desiili, Diskreetti jakauma, Diskreetti satunnaismuuttuja, Huipukkuus, Insidenssikuvaus, Jatkuva jakauma, Jatkuva satunnaismuuttuja, Kertymäfunktio, Keskusmomentti, Kvantiili, Kvartiili, Mediaani, Momentti, Moodi, Odotusarvo, Origomomentti, Painopiste, Piste, Pistetodennäköisyys, Pistetodennäköisyysfunktio, Prosenttipiste, Puu, Puutodennäköisyys, Reitti, Rinnan kytkentä, Sarjaan kytkentä, Satunnaismuuttuja, Standardipoikkeama, Särmä, Tiheysfunktio, Todennäköisyysjakauma, Todennäköisyysmassa, Toimintatodennäköisyys, Toimintaverkko, Tulosääntö, Tunnusluku, Varianssi, Verkko, Vinous, Yhteenlaskusääntö

Tehtävä 3.1.

Uurnassa A on 4 valkoista ja 6 mustaa kuulaa ja uurnassa B on 6 valkoista ja 4 mustaa kuulaa. Poimitaan kummastakin uurnasta satunnaisesti yksi kuula sekä asetetaan uurnasta A poimittu kuula uurnaan B ja uurnasta B poimittu kuula uurnaan A. Poimitaan tämän jälkeen uurnasta B satunnaisesti kuula. Mikä on todennäköisyys, että poimittu kuula on valkoinen?

Ohje: Konstruoi tehtävän ratkaisemista varten tarkoitukseen sopiva *puumainen verkko*.

Tehtävä 3.2.

Mies aikoo pelata uhkapeliä, jonka jokaisella kierroksella joko voittaa tai häviää euron. Kun mies aloittaa pelin, hänellä on yksi euro. Mies päättää pelata kunnes hänellä on kasassa 4 euroa tai kunnes hänen rahansa loppuvat, mutta kuitenkin korkeintaan 5 pelikierrosta.

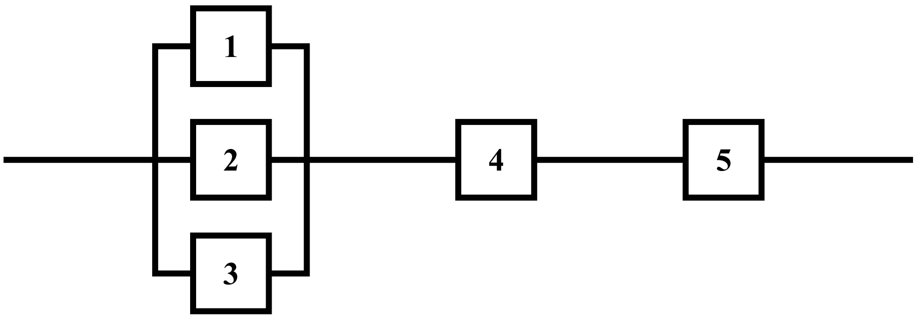
Millä todennäköisyydellä miehellä on lopettaessaan pelin kasassa täsmälleen 2 euroa, kun voiton todennäköisyys on kullakin pelikierroksella 1/4?

Ohje: Konstruoi tehtävän ratkaisemista varten tarkoitukseen sopiva *puumainen verkko*.

Tehtävä 3.3.

Seuraava kuva esittää sähköistä verkkoa, jossa on 5 komponenttia, joista jokaisen toimintatodennäköisyys on p. Oletetaan, että komponenttien vikaantumiset ovat tapahtumina toisistaan riippumattomia.

Mikä on todennäköisyys, että verkko toimii, ts. virta kulkee verkon läpi?



Tehtävä 3.4.

Olkoon asetelmana sama kuin tehtävässä 3.2., mutta mies päättää pelata peliä korkeintaan 3 kierrosta. Olkoon satunnaismuuttuja

X = Miehen pääoma hänen lopettaessaan pelin

(a) Määrää todennäköisyydet tapahtumille $X = 0, 1, 2, 3, 4$ puuverkkoa käyttäen ja määrittele niiden avulla satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyysfunktio. Hahmottele funktion kuvaaja paperille.

(b) Määrää satunnaismuuttujan X kertymäfunktio. Hahmottele funktion kuvaaja paperille.

(c) Mikä on tapahtuman $X = 1.5$ todennäköisyys?

(d) Määrää tapahtuman $X > 1$ todennäköisyys pistetodennäköisyysfunktion avulla.

(e) Määrää tapahtuman $X > 1$ todennäköisyys kertymäfunktion avulla.

(f) Määrää satunnaismuuttujan X odotusarvo.

(g) Määrää satunnaismuuttujan X varianssi.

Tehtävä 3.5.

Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on muotoa

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2ax, & \text{kun } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

(a) Määrää vakion $a < 0$ arvo.

(b) Määrää satunnaismuuttujan X kertymäfunktio.

(c) Määrää tapahtuman $X = 0.5$ todennäköisyys.

(d) Määrää tapahtuman $0 \le X \le 0.25$ todennäköisyys tiheysfunktion avulla.

(e) Määrää tapahtuman $0 \le X \le 0.25$ todennäköisyys kertymäfunktion avulla.

Tehtävä 3.6.

Määrää tehtävän 3.5. todennäköisyysjakauman odotusarvo ja varianssi.

Tehtävä 3.7.

Satunnaismuuttujan X kertymäfunktio on muotoa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ -x^2 + bx, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

(a) Määrää vakion b arvo.

(b) Määrää tapahtuman $X = 0.5$ todennäköisyys.

(c) Määrää tapahtuman $0.25 \le X \le 0.5$ todennäköisyys.

(d) Määrää satunnaismuuttujan X tiheysfunktio.

Tehtävä 3.8.

Määrää tehtävän 3.7. todennäköisyysjakauman odotusarvo ja standardipoikkeama.