

III Fourier - sarjat

1. Jaksolliset funktiot

Funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jaksollinen, jos $\exists p > 0$ s.e.

$$f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pienin mahdollinen p on funktion perusjakso. Vakiofunktioilla ei ole perusjaksoa, mikä se on jaksollinen.

Esim. Funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ ovat jaksollisia; niiden perusjakso on 2π (olet. tunnetuksi)

Funktio $\sin(3x)$ perusjakso saadaan ehdosta

$$\sin(3(x+p)) = \sin(3x+2\pi) \Rightarrow 3p = 2\pi \text{ eli } p = \frac{2\pi}{3}$$

Yleisesti: funktioiden $\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ perusjakso on $2L$.

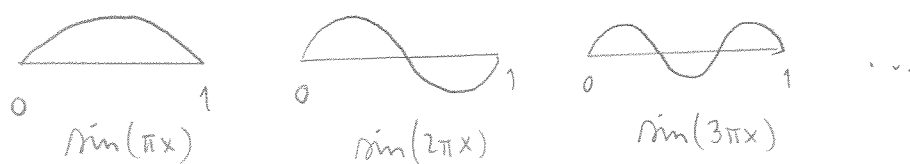
Huom: $\tan x$ ei ole jaksollinen (tarkasti ottaen),

koska se ei ole määritelty kaikilla. Sen sijaan

$$f(x) = \begin{cases} \tan x, & x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \quad \text{on } \pi\text{-jaksollinen}$$

Joseph Fourier esitti 1800-l. alkuun, että kaikki jatkuvat funktiot voidaan esittää sarjana, josta esiintyy vain muotoa $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ olevia termejä.

VRT. Jännitetyn keulan ominaisvärähtelyt:



Värähtelyn muoto säilyy: $u(x, t) = \cos(m\pi t) \sin(m\pi x)$

(ajasta riippuva
amplituditeho!) $\Rightarrow u_{tt} = u_{xx}$ (aaltoyhtälö)

Kysymys: Voidaanko yleinen värähtely esittää superpositiona näistä? Jos voidaan, niin aikakehityksen selvittää.

Vast: Voidaan Fourier-sarjain avulla:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) ?$$

$$\left(a_0 = a_0 \cos\left(\frac{0 \cdot \pi x}{L}\right) = a_0 \cos 0 \right)$$

$$b_0 = b_0 \sin\left(\frac{0 \cdot \pi x}{L}\right) \equiv 0$$

2. 2π -jaksoisen funktion Fourier-sarja

Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jaksittain jatkuva ($\Rightarrow$ integrointi omissa väleillä $[a, b]$)

Voiko olla

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

sopivilla kertoimilla $a_n, b_n \in \mathbb{R}$?

Olet. pätee jos etti voidaan integroida termittäin:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx}_{=0} \\ &= 2\pi a_0. \end{aligned}$$

Siiis: jos esitys on olemassa, niin $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$

$= f$:n keskimääräinen arvolla

Enti muut kertoimet? Ne voidaan seurata havainnollisesti perustella: Funktiot $\{1, \sin(nx), \cos(nx) \mid n, m \geq 1\}$ ovat kohtisuorien toisiaan vastaan, jos kohtisuoruus määritellään sisätulon $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ avulla.

Tod. Käytämme jo yllä tiettä $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx = 0$, 63

tr. $(1, \sin mx) = (1, \cos mx) = 0$ eli $1 \perp \sin mx, 1 \perp \cos mx$.

Muut:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(mx) dx &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{imx} - e^{-imx})(e^{imx} + e^{-imx}) dx \\ &= \frac{1}{4i} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i(m+m)x} + e^{i(m-m)x} - e^{i(m-m)x} - e^{-i(m+m)x}) dx \\ &= \frac{1}{4i} \left(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+m)x} dx}_{\downarrow \text{INT. } 0} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-m)x} dx}_{\downarrow \text{INT. } 0} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-m)x} dx}_{\downarrow \text{INT. } 0} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(m+m)x} dx}_{\downarrow \text{INT. } 0} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$= \begin{cases} \text{INT} = 0 - 0 = 0, m \neq m \\ 1 - 1 = 0, \text{ jos } m = m \end{cases}$

Sammoin

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(mx) dx &= \frac{1}{2i \cdot 2i} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{imx} - e^{-imx})(e^{imx} - e^{-imx}) dx \\ &= \frac{-1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i(m+m)x} - e^{i(m-m)x} - e^{+i(m-m)x} + e^{-i(m+m)x}) dx \\ &= \frac{-1}{4} \left(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+m)x} dx}_{\downarrow \text{INT. } 0} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-m)x} dx}_{\downarrow \text{INT. } 0, \text{ jos } m \neq m} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{+i(m-m)x} dx}_{\downarrow \text{INT. } 0} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(m+m)x} dx}_{\downarrow \text{INT. } 0} \right) \\ &= \begin{cases} 0, m \neq m \\ -\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot (-2) = \pi, \text{ jos } m = m \end{cases} \end{aligned}$$

Logiikka: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(mx) dx = \dots = \begin{cases} 0, m \neq m \\ \pi, m = m \end{cases}$

$\Rightarrow$ VÄITTE.

Edellistä tulosta käyttämällä random muuttujan kertoimet:

$$f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)) \quad \left| \cos(mx) \right| \int_{-\pi}^{\pi} \dots dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx &= \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos(mx) dx}_{=0} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(mx) dx}_{= \begin{cases} \pi, m=m \\ 0, \text{muuten} \end{cases}} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(mx) dx}_{=0 \text{ AINA}} \end{aligned}$$

$$= a_m \cdot \pi$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx, \quad m \geq 1.$$

Vastavaste: $b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx, \quad m \geq 1$

Def. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -jaksollinen. Tällöin f on $\swarrow$ + pal. jaksollinen

Fourier-kertoimet ovat

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx, \quad m \geq 1$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx, \quad m \geq 1$$

Fourier - cos - kertoimet

Fourier - sin - kertoimet

Huom: äärellinen F-sarja = trigonometrinen polynomi

Kaksi ongelmaa: jos f on annettu, niin

(i) saaytenuko F -kertoimista muodotettu saaja?

(ii) saaytenuko se pisteen $x \in \mathbb{R}$ kohti annoa $f(x)$?

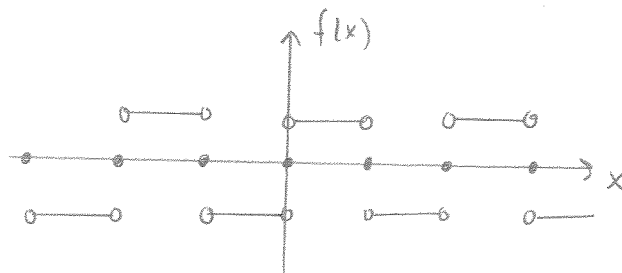
Koska tana ei ole etukateen selvni, merk.

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Esim. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$

$$f(n\pi) = 0 \text{ (esim.)}$$

+ f on 2π -jaksoinen



$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos(nx) dx \right)$$

$$= 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(- \left/ \left(-\frac{1}{n} \cos(nx) \right) \right/_{-\pi}^0 + \left/ \left(-\frac{1}{n} \cos(nx) \right) \right/_0^{\pi} \right)$$

$$= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} = \begin{cases} 0, & n \text{ parillinen} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ pariton} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$f(x) \sim b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \dots$$

$$= b_1 \sin x + b_3 \sin(3x) + b_5 \sin(5x) + \dots$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right)$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} \quad \text{F-sarjan}$$

Jos $f(x) = \text{F-sarjan}$ nimen pisteen $x = \pi/2$ (erim.), niin

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((n-\frac{1}{2})\pi)}{2n-1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}, \text{ joten}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Huom: (i) Lasken olisi ollut helpompaa, jos olisi käytetty

tietaa $f = \text{pariton}$; ts. $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

noikin $a_n = 0 \quad \forall n$, koska $f(x) \cdot \cos(nx)$ on pariton,

$$\text{ja toisaalta } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx,$$

koska $f(x) \sin(nx)$ on parillinen.

Yleisesti: PARILLINEN $\cdot$ $\begin{cases} \text{PARILLINEN} = \text{PARILLINEN} \\ \text{PARITON} = \text{PARITON} \end{cases}$; PARITON $\cdot$ PARITON = PARILLINEN

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0, \text{ jos } f \text{ pariton}; \quad \int_{-a}^a g(x) dx = 2 \int_0^a g(x) dx, \text{ jos } g \text{ parillinen}$$

(ii) Pisteissä $x = n\pi$ sarja on identtisesti nolla, joka on myös f :n hyppäyksen pisteinä. Tämä ei ole sattuman:

Lause Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -jaksoinen, paloitteittain jatkuva ja paloitteittain C^1 .

(i) Tällöin f :n Fourier-sarja suppenee pisteessä x kohti arvoa $f(x)$, jos f on jatkuva x :ssä, ja kohti lukua $\frac{1}{2} \left(\lim_{y \rightarrow x+} f(y) + \lim_{y \rightarrow x-} f(y) \right)$, jos f epäjatkuva.

(ii) Jos f on pariton, niin $a_n = 0 \forall n \geq 0$

ja kyseessä on Fourier-sinisarja.

Jos f on parillinen, niin $b_n = 0 \forall n \geq 1$ ja

kyseessä on Fourier-kosinisarja.

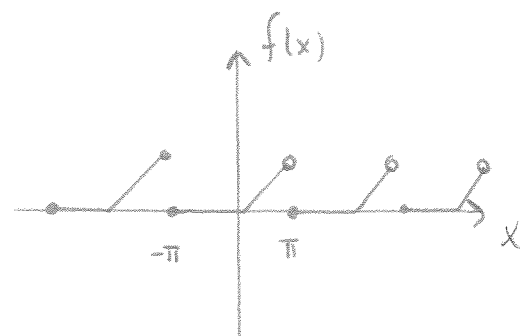
 $\leftarrow$ F-sarjan määrittäminen

Huom. Yleisesti: Fourier-sarjojen antaennot ovat polkkaavat lineaariset potenssisarjat. Mm. potenssisarjojen derivointi on aina mahdollista, mutta Fourier-sarjat ei:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin(3^n x)$ on jatkuva $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mutta

sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n} \cos(3^n x)$ hajaantuu (muuttuu potiksi $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$)

Exim. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$



f is periodic with period π

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{\int_0^{\pi} \frac{1}{n} x \sin(nx) dx}_{=0} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right) \quad \text{or. int.}$$

$$= \frac{1}{n^2 \pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{1}{n^2 \pi} \left((-1)^n - 1 \right) = \begin{cases} -2/\pi n^2, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \dots = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \dots \right) \\ + \sin x - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \dots$$

f jump at $x=0$: $\Rightarrow 0 = f(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) + 0 + 0 + \dots$

$$\text{for } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Fourier-sarjan kompleksinen muoto

Fourier-sarjan voi esittää myös kompleksisessa muodossa, ehkä jopa helpommin kuin reaalissa:

$$\text{Kosin} \quad \sin(mx) = \frac{1}{2i} (e^{imx} - e^{-imx}) \quad \text{ja}$$

$$\cos(mx) = \frac{1}{2} (e^{imx} + e^{-imx}),$$

niin

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) - \frac{ib_n}{2} (e^{inx} - e^{-inx}) \right)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-inx}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2} (a_{-n} + ib_{-n}) e^{inx}$$

$$\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \text{ missä}$$

$$c_n = \begin{cases} a_0, & n=0 \\ \frac{1}{2} (a_n - ib_n), & n \geq 1 \\ \frac{1}{2} (a_{-n} + ib_{-n}), & n \leq -1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

kaikilla n

HARJ. TEHT.

ETUJA: (i) Sama muoto kaikille kertoimille

(ii) egs on helpompi käsitellä kuin sin/cos.

HAITTA: reaalinen f

FOURIER-sarja

vaatii kompleksista

Esim. $f(x) = e^x$, kun $-\pi \leq x < \pi$; f on 2π -jaksollinen

$$\Rightarrow c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-im)x} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left/ \frac{1}{1-im} e^{(1-im)x} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi(1-im)} \left(\underbrace{e^{\pi} e^{-im\pi}}_{(-1)^m} - \underbrace{e^{-\pi} e^{im\pi}}_{(-1)^m} \right)$$

$$= \frac{(-1)^m}{2\pi(1-im)} \underbrace{(e^{\pi} - e^{-\pi})}_{2 \sinh \pi} = \frac{(-1)^m}{\pi(1-im)} \sinh \pi$$

$$\Rightarrow e^x \sim \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\underbrace{1-im}_{\frac{(-1)^m(1+im)}{1+m^2}}} e^{+imx}$$

Tästä voidaan myös nähdä suoraan (jos halutaan...):

yleistä $c_{\pm m} e^{\pm imx} = c_{\pm m} (\cos(mx) \pm i \sin(mx));$

jos $m \geq 1$, niin $c_{-m} e^{-imx} + c_m e^{imx} = (c_m + c_{-m}) \cos(mx) + i(c_m - c_{-m}) \sin(mx)$

joten
$$\begin{cases} a_m = c_m + c_{-m} \\ b_m = i(c_m - c_{-m}), \quad m \geq 1 \end{cases}$$

$$a_0 = c_0$$

3. 2L-jaksollinen funktio

Jos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on 2L-jaksollinen, niin

$g(y) = f(Ly/\pi)$ on 2π -jaksollinen:

$$\begin{aligned} g(y+2\pi) &= f(L(y+2\pi)/\pi) = f(Ly/\pi + 2L) \\ &= f(Ly/\pi) = g(y). \end{aligned}$$

Funktion g Fourier-maaja on siis muotoa

$$g(y) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(ny) + b_n \sin(ny)), \quad y \in \mathbb{R},$$

$$\text{missä } a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(Ly/\pi) dy = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

ja samoin

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ny) g(y) dy = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

$Ly/\pi = x \Rightarrow dy = \frac{\pi}{L} dx$

$$b_n = \dots = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Tällöin siis

$$f(x) = g(\pi x/L) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

missä kertoimella on jo lausuttu. Tämä on

2L-jaksollisen funktion F-maaja.

Huom. Saman tuloksen olisi pitänyt myös käyttäillä

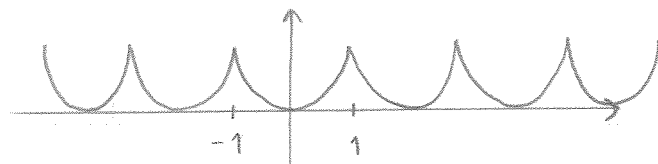
$$\text{tietoja } \int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \dots \text{ jne, kuten aik.}$$

Vastauksen kompleksimuoto on

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{im\pi x/L}, \text{ missä } c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-im\pi x/L} dx.$$

Esim. $f(x) = x^2$, kun $-1 \leq x \leq 1$, j $\ddot{a}$ f on 2-jaksoittainen

$$2L = 2 \Rightarrow L = 1 \Rightarrow \frac{m\pi x}{L} = m\pi x$$



$$a_0 = \frac{1}{2 \cdot 1} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = c_0$$

($b_n = 0 \quad \forall n$, koska f on parillinen)

OS. INT. ON "HELPOMPI" EXP-FUNKTIOILLI
KUN SIN/COS

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 e^{-im\pi x} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 \frac{-1}{m\pi i} x^2 e^{-im\pi x} + \frac{1}{m\pi i} \int_{-1}^1 2x e^{-im\pi x} dx \right)$$

$$= \frac{1}{m\pi i} \left(\int_{-1}^1 x \cdot \left(-\frac{1}{m\pi i} e^{-im\pi x} \right) + \frac{1}{m\pi i} \int_{-1}^1 e^{-im\pi x} dx \right)$$

$$= \frac{1}{m^2 \pi^2} \left(1 \cdot e^{-im\pi} - (-1) e^{+im\pi} \right)$$

$$= \frac{2 \cos(m\pi)}{m^2 \pi^2} = \frac{2 \cdot (-1)^m}{m^2 \pi^2}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{1}{3} + \sum_{n \neq 0} \frac{2 \cdot (-1)^n}{m^2 \pi^2} e^{im\pi x} = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x).$$

Kokoa f on jatkuva ja pol. C^1 , niin sarjan summa $= f(x)$
 kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Sijoitetaan $x=1$:

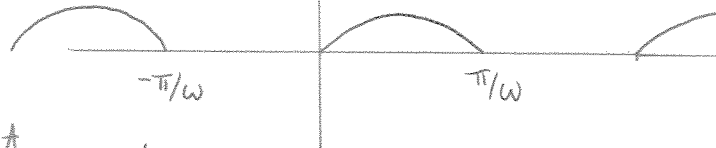
$$1 = f(1) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{6}}}$$

Esim. Tammunlainen:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & -\pi/\omega < t < 0 \\ E \sin(\omega t), & 0 < t < \pi/\omega \end{cases}$$

ja u on $2\pi/\omega$ -jaksoinen



$$2L = 2\pi/\omega \Rightarrow L = \pi/\omega$$

$$\frac{m\pi t}{L} = m\omega t$$

$$C_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} u(t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} E \sin \omega t dt = \frac{E}{\pi}$$

$$C_m = \frac{\omega}{2\pi} E \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \sin(\omega t) e^{-im\omega t} dt = \frac{\omega E}{4\pi i} \int_0^{\pi/\omega} (e^{i\omega t(1-m)} - e^{-i\omega t(m+1)}) dt$$

$$= \frac{\omega E}{4\pi i} \left[\frac{1}{i\omega(1-m)} e^{i\omega t(1-m)} + \frac{1}{i\omega(m+1)} e^{-i\omega t(m+1)} \right]_0^{\pi/\omega}$$

$$= -\frac{E}{4\pi} \left(\frac{1}{1-m} \underbrace{(e^{i(1-m)\pi} - 1)}_{(-1)^{m-1}} + \frac{1}{m+1} \underbrace{(e^{-i\pi(m+1)} - 1)}_{(-1)^{m+1}} \right)$$

$$= \begin{cases} 0, & m \text{ pariton} \\ \frac{E}{2\pi} \left(\frac{1}{1-m} + \frac{1}{m+1} \right) = \frac{-E/\pi}{(m+1)(m-1)} = \frac{-E/\pi}{m^2-1}, & m \text{ parill.} \end{cases}$$

$$\text{Lisäksi } C_1 = +\pi/\omega \cdot \frac{\omega E}{4\pi i} = \frac{E}{4i}, \quad C_{-1} = -\pi/\omega \cdot \frac{\omega E}{4\pi i} = -\frac{E}{4i}$$

74.

Huomaa, että aina pätee: $C_{-m} = +C_m, m \geq 2$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(t) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t} = \frac{E}{\pi} + \underbrace{\frac{E}{4i}}_{C_1} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) - \underbrace{\frac{E}{4i}}_{C_{-1}} (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (\underbrace{C_n}_{+C_m} e^{in\omega t} + \underbrace{C_{-n}}_{+C_m} e^{-in\omega t}) \\ &= \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin(\omega t) + \sum_{n=2}^{\infty} 2C_n \cos(n\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin(\omega t) - \underbrace{\frac{2E}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos(2\omega t) + \frac{1}{15} \cos(4\omega t) + \dots \right)}_{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cdot \cos(2n\omega t)} \end{aligned}$$

4. Jatkuvien parittisien tai parittomien

Jokainen funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan jakaa parittiseen ja parittomaan osaan 1-kertaisella temppulla:

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) + f(-x))}_{= f_+(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) - f(-x))}_{= f_-(x)}$$

$$\text{Tällöin } f_+(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(-(-x))) = f_+(x) \quad \text{ja}$$

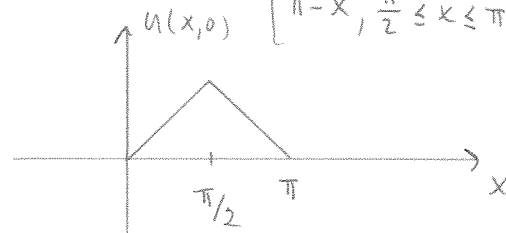
$$f_-(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(-(-x))) = -f_-(x).$$

Joskin tyypillisin funktio haluttuun kehittää joko pelkästään sinisarjaksi tai pelkästään kosinisarjaksi:

✓
75.

Esim. Jännitetyn kiden alkuseman kuva $u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

Määritä $u(x,t)$, kun $u_{tt} = u_{xx}$.



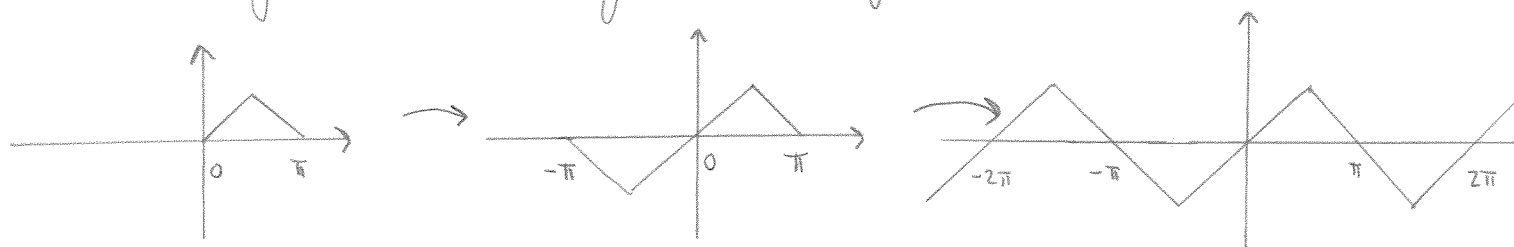
Jos $u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(mx)$, $0 \leq x \leq \pi$,

niin saadaan $u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos(mt) \sin(mx)$.

Mutta $u(x,0)$ ei ole edes jatkollinen, ja yleisessä F-sarjassa on joko tyypillisessä esiintyvä myös $\cos$ -termejä ???

Ratkaisu: Yp. funktiolle saadaan väädettyä muotoa oleva sinisarja, jos se

- jatketaan ensin parittomaksi välille $[-\pi, \pi]$
- jatketaan sen jälkeen 2π -jaksolliseksi koko $\mathbb{R}$:iin



Tällöin kyseessä on 2π -jaksollinen pariton funktio, jonka

Fourier-sarja sis. vain sin-termejä; ts. $a_m = 0 \quad \forall m \geq 0$.

Vastaus: jatkaminen parittomaksi 2π -jaksolliseksi tuohtaa Fourier-kosinisarjan.