

(iii) Fourier-integraalit

Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (tai $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) Fourier-muunnos $\mathcal{F}f$ on uusi funktio

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx,$$

jota integraali on määritelty (erim. pääarvona).

HUOM: välik $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ja exp-termin etumerkki riittää kirjoittaa!

Fourier-muunnosta käsitellään myöhemmin kurssilla. Tässä lasketaan joitakin esimerkkejä Residyyjen avulla.

Esim. Laske $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$.

Ratk. $\left| \frac{\cos x}{1+x^2} \right| = \frac{|\cos x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$, joten integraali suppenee.

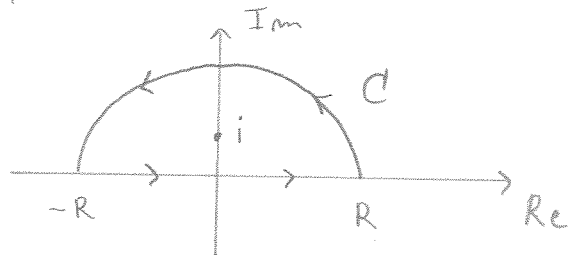
Funktio on parillinen ($f(-x) = f(x)$), joten $\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$.

Kokeillaan samaa kuin rat. funktioilla, mutta lasketaan

yleisemmin $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx$, jolloin $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \operatorname{Re} I$.

$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$; merkit $z = \pm i$, joista

vain $z = i$ on sisällä C in sisällä



$$\begin{aligned} \Rightarrow \oint_C f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res} f(z) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)} \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{iz}}{z+i} = 2\pi i \cdot \frac{e^{i \cdot i}}{i+i} = \pi e^{-1}. \end{aligned}$$

Toinen $\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx + \int_{C_R} f(z) dz.$

Täällä $\int_{C_R} f(z) dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{1+(Re^{it})^2} \cdot iRe^{it} dt$

$$= iR \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{1+R^2 e^{i2t}} e^{it} dt$$

Koska $\left| \frac{e^{iRe^{it}}}{1+R^2 e^{i2t}} e^{it} \right| \leq \frac{|e^{iR(\cos t + i \sin t)}|}{|R^2 e^{i2t}| - 1} \underbrace{|e^{it}|}_{=1}$

$$= \frac{e^{-R \sin t}}{R^2 - 1} \rightarrow 0, \text{ kun } R \rightarrow \infty \text{ (Huom: } \sin t \geq 0, \text{ kun } t \in [0, \pi])$$

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$ Siis

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\pi e^{-1}) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2e}}}.$$

Sivottuun osiin $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{1+x^2} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \operatorname{Im}(\pi e^{-1}) = 0,$

mutta se on selvä perustusten perusteella.

On kuitenkin helppompi laskea e^{ix} :n avulla kuin $\cos x$:in

käyttämällä!

Esim. Laske tamm. Fresnel-integrali: $\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$

Tavo $\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \text{Im} \int_0^{\infty} e^{ix^2} dx$. Mutta myyseenkö
integrali olemassa? $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x^2)$ ei ole olemassa!

Muuttujasuunnit $t = x^2 + \text{r. ind.} \Rightarrow$ myysee! (sivun taitto)

Tämä on käytännön sopivan ymmyrösköriä, jolle

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iz^2} dz = 0$. Tarkistetaan, mille kerrille C_R

määrin on: $z = z(t) = Re^{it} \Rightarrow z'(t) = iRe^{it}$ ja

$$e^{iz^2} = e^{iR^2 e^{i2t}} = e^{iR^2 \cos 2t - R^2 \sin 2t}$$

$$|e^{iz^2}| = e^{-R^2 \sin 2t}, \text{ mutta } \sin(2t) \geq 0 \text{ kun } t \in [0, \pi/2]$$

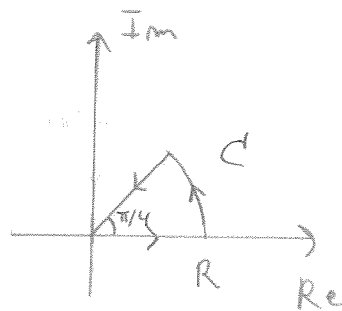
$\Rightarrow$ ei voi valita koko puolisympyyttä, koska muuttuu

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iz^2} dz \neq 0$. Osoittamiseksi: kerralla C_R on
hyvin valinta.

$$e^{iz^2} \text{ analyyttinen} \Rightarrow \oint e^{iz^2} dz = 0.$$

$$\text{Toisaalta } \oint_C e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{ix^2} dx + \underbrace{\int_{C_R} e^{iz^2} dz}_{\rightarrow 0, \text{ kun } R \rightarrow \infty} + \int e^{iz^2} dz$$

VINO OSA ALAS



Lisäksi

$$\int e^{iz^2} dz = - \int e^{iz^2} dz = - \int_0^R e^{i(t e^{i\pi/4})^2} \cdot e^{i\pi/4} dt$$

VINO ALAS VINO YLÖS $\uparrow z = t e^{i\pi/4}, z' = e^{i\pi/4}$

$$= - e^{i\pi/4} \int_0^R e^{it^2} e^{i\pi/2} dt = - e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-t^2} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^R e^{ix^2} dx = e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-t^2} dt + \int_{C_R} e^{iz^2} dz$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{ix^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} (1+i) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} (1+i) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{Siis } \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \left(= \int_0^\infty \cos(x^2) dx \right).$$

Logikin esimerkki hieman hankalammasta tilanteesta:

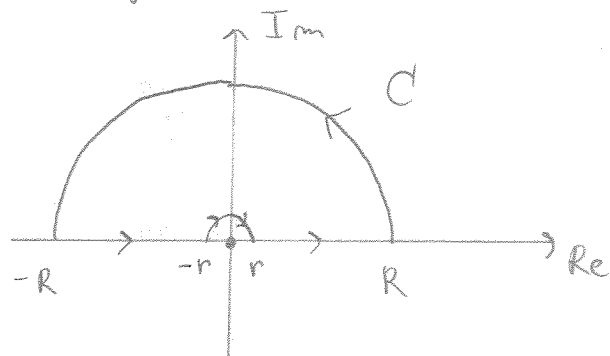
Esim. Laske $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

Tästä voidaan käyttää puolijonnyä, mutta piste $z=0$ tuo ongelman. Olkoon taas $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$

f analyttinen C :n sisällä

$$\Rightarrow \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \text{ ja toiselta}$$

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz$$



$$\begin{aligned} \text{T\u00e4nn} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_0^\pi \frac{e^{i(R\cos t + iR\sin t)}}{Re^{it}} iRe^{it} dt \\ &= i \int_0^\pi \underbrace{e^{iR\cos t}}_{|1|=1} e^{-R\sin t} dt \rightarrow 0, \text{ k\u00f6nnen } \sin t \geq 0. \end{aligned}$$

Vorzeichen C_r :

$$\begin{aligned} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_\pi^0 \frac{e^{i(r\cos t + ir\sin t)}}{re^{it}} i re^{it} dt \\ &= -i \int_0^\pi \underbrace{e^{ir\cos t}}_{\rightarrow 1, \text{ k\u00f6nnen } r \rightarrow 0} e^{-r\sin t} dt \rightarrow -\pi i, \text{ k\u00f6nnen } r \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i + \underbrace{\text{VIRHETERMIT}}_{\rightarrow 0, \text{ k\u00f6nnen } r \rightarrow 0}$$

$$\Rightarrow \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i, \text{ j\u00e4ten}$$

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \text{Im}(\pi i) = \pi. \text{ Integranti supponere}$$

m\u00e4\u00f4r t\u00e4nn. m\u00e4kl\u00f6nn (mutta $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ ei!), j\u00e4ten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underline{\underline{\pi.}}$$

Logurien esimerkki sarjan summamiseksi residyyllä:

Esim. Laske $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

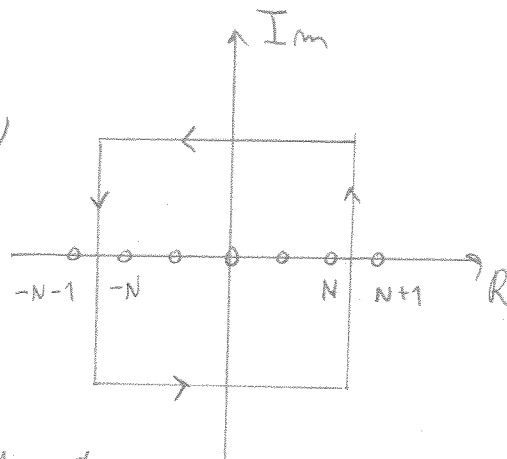
Ratkaisun idea: funktiolle $f(z) = \frac{\cot(\pi z)}{z^2}$ on 3-kertainen

näkö pisteen $z=0$ ja 1-kertaiset nollat $z=m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

(syy: $\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow \pi z = m\pi \Leftrightarrow z = m \in \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow \int_{C_N} f(z) dz = 2\pi i \left(\underset{z=0}{\text{Res } f(z)} + \sum_{\substack{m \neq 0 \\ z=m}}^{\pm N} \text{Res } f(z) \right),$$

missä $C_N = \partial \left(\left[-N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2} \right]^2 \right)$



Pätee: $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C_N} f(z) dz = 0$ = NELIÖ, sivun pituus $2N+1$

koska $\left| \frac{\cot \pi z}{z^2} \right| \leq \frac{\text{VAKIO}}{N^2}$ käyrällä C_N .

Laskeaan residyyt:

$z=0$: $\cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{45}x^3 - \dots$

$$\Rightarrow \cot(\pi z) = \frac{1}{\pi z} - \frac{\pi}{3}z + \frac{\pi^3}{45}z^3 - \dots$$

$$\Rightarrow \cot(\pi z)/z^2 = \frac{1}{\pi z^3} - \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{z} + \frac{\pi^3}{45}z - \dots \Rightarrow \underset{z=0}{\text{Res } f(z)} = -\frac{\pi^2}{3}$$

$z=m$:

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow m} (z-m) f(z) = \lim_{z \rightarrow m} \frac{(z-m) \cot(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)}$$

$$= \frac{\cot(m\pi)}{m^2} \lim_{z \rightarrow m} \frac{z-m}{\sin(\pi z)} = \frac{(-1)^m}{m^2} \lim_{z \rightarrow m} \frac{1}{\pi \cos(\pi z)} = \frac{1}{\pi m^2}$$

0 KUN $N \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \int_{C_N} f(z) dz = 2\pi i \left(-\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \sum_{m=1}^N \frac{1}{\pi m^2} \right) \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$