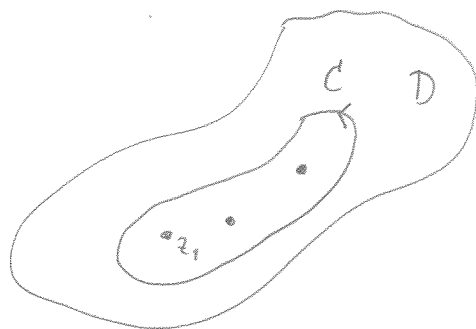


Nyt kun osamme laskea residyt tehokkaasti, voimme muotoilla residylaskennan päätuloksen:

Residylause Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ yhdeksi yhtenäiseksi alue, $C \subset D$ suljettu* käyrä ja $z_1, z_2, \dots, z_n \in D$ käyrän C sisäpuolella. Jos f on analyyttinen D :n sisällä pisteissä $z_1, \dots, z_n$ lukuunottamatta, niin

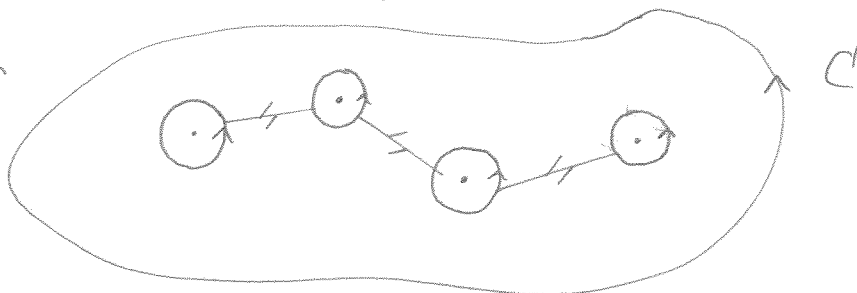
$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

$C \leftarrow$ pos. kierto



Perustelu $C \rightarrow$ ympyrät + JAKAT jatkamalla määrittelyä

Integroitua janoja
jatkamalla määrittelyä



$$\Rightarrow \oint_C f(z) dz = \oint_C f(z) dz = \oint_C f(z) dz + \underbrace{\int f(z) dz}_{=0}$$

YMPYRÄT + JAKAT YMPYRÄT JAKAT

$$= \oint_{\partial B(z_1, r)} f(z) dz + \dots + \oint_{\partial B(z_n, r)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \quad \square$$

Esim. $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z+2)^2}$ $z_1 = 1, z_2 = -2$ $\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = 1/2$ $\operatorname{Res}_{z=-2} f(z) = -1/2$ (ed. sivu!)

$$\Rightarrow \oint_C f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0, \quad \int_{|z+2|=1} f(z) dz = -\frac{2\pi i}{27}$$

$|z|=3$ $|z+2|=1$

6. Residylaskennan sovelluksia reaalisiin integraaleihin

(i) Trigonometriset integraalit

Muotoa $\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt$, missä F jokin lauseke.

Idea: Kytseä on kompleksisen integraalin

$$\oint \underbrace{F\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}_{\equiv f(z)} \frac{1}{iz} dz \quad (*)$$

parametrisoitua muoto!

Miten? Jos $z = z(t) = e^{it}$, niin

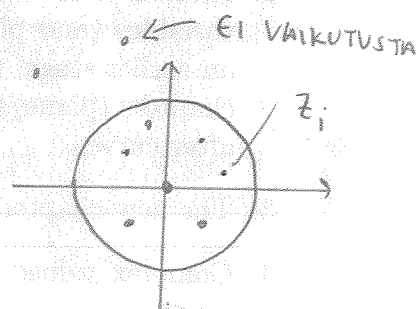
$$z + \frac{1}{z} = e^{it} + e^{-it} = 2 \cos t$$

$$z - \frac{1}{z} = e^{it} - e^{-it} = 2i \sin t$$

$$z'(t) = ie^{it} = iz, \text{ joten } dz = iz dt$$

Näiden muunnosten jälkeen nähdään, että integraalin (*) arvo on funktion f residyyjen summa 1-ympäryksen sisällä jännä muoto:

$$* = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_i \\ |z_i| < 1}} \text{Res } f(z)$$



Täytyy tietysti olla: f analyttinen nappoja lukuunottamatta.

$$\text{Esim.} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} = ?$$

$$\text{rij. } \sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad dt = \frac{dz}{iz}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} = \oint_{1-\text{ymp.}} \frac{1}{iz} \cdot \frac{1}{2 + \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)} dz$$

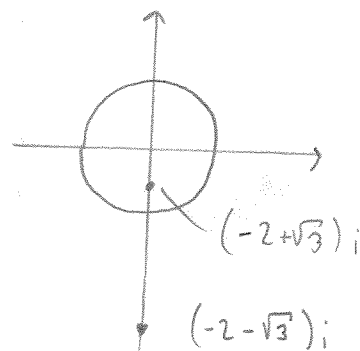
$$= \oint \frac{1}{2iz + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}} dz = 2 \oint \frac{dz}{z^2 + 4iz - 1}$$

$$\text{Nauut: } z^2 + 4iz - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-4i \pm \sqrt{(4i)^2 + 4}}{2} = -2i \pm \sqrt{-3}$$

$$= (-2 \pm \sqrt{3})i$$

Vain $(-2 + \sqrt{3})i$ on 1-ympyrän sisällä

$$\Rightarrow \text{integraali} = 2\pi i \operatorname{Res} \left(2 \cdot \frac{1}{z^2 + 4iz - 1} \right)_{z = (-2 + \sqrt{3})i}$$



$$= 4\pi i \lim_{z \rightarrow (-2 + \sqrt{3})i} \frac{(z - (-2 + \sqrt{3})i)}{(z - (-2 + \sqrt{3})i)(z - (-2 - \sqrt{3})i)} \cdot \frac{1}{(z - (-2 + \sqrt{3})i)(z - (-2 - \sqrt{3})i)}$$

$$= 4\pi i \cdot \frac{1}{(-2 + \sqrt{3})i - (-2 - \sqrt{3})i} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}}$$

Huom, että i myristen, kuten pitääkin.

Exim. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2} = ?$

Sij. $\cos t \rightarrow \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad dt = \frac{dz}{iz}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2} = \oint \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2} \cdot \frac{1}{iz} dz$$

$$= -4i \oint \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2} dz$$

Nullst: $(z^2 + 4z + 1) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = -2 \pm \sqrt{3},$

moduliert 2-kreislinie, nur $-2 + \sqrt{3}$ im 1-Quadranten
residuenstellen z_1

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2} = 2\pi i \cdot (-4i) \cdot \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = 8\pi \cdot \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z)$$

$$f(z) = \frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2} \Rightarrow (z-z_1)^2 f(z) = \frac{z}{(z-z_2)^2}$$

$$\frac{d}{dz} \left((z-z_1)^2 f(z) \right) = \frac{1 \cdot (z-z_2)^2 - 2(z-z_2) \cdot z}{(z-z_2)^4} = - \frac{z+z_2}{(z-z_2)^3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = - \frac{z_1+z_2}{(z_1-z_2)^3} = - \frac{-2+\sqrt{3}+(-2-\sqrt{3})}{(-2+\sqrt{3}-(-2-\sqrt{3}))^3} = \frac{4}{8 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2} = \frac{8\pi}{6\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}}$$

(ii) Rationaalfunktio

50

Integraali $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ suppenee, jos $\deg Q \geq \deg P + 2$

ja $Q(x) \neq 0$ kaikella $x \in \mathbb{R}$.

Huomaa, että $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx$, jos

mollemmilla integraaleilla on suppenevia.

Yleisempi käsite on ns. pääarvointegraali:

P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$, jos raja-arvo on olemassa. P.V. = principal value

Samoin esim. P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-a} f(x) dx + \int_a^1 f(x) dx \right)$, jos

Esim. P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x dx = 0$

$f(0)$ ei ole
määriteltä

$$\text{P.V.} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-a} \frac{dx}{x} + \int_a^1 \frac{dx}{x} \right) = 0.$$

Pääarvointegraali on siis yleisempi käsite kuin tavallinen epäoleellinen integraali.

Jotakin pääarvointegraaleja voidaan laskea merkitylaskannan avulla, mutta keskeisimmät sin tavallisim.

Yleinen tulos: Jos $\deg Q \geq \deg P + 2$ ja $Q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$,

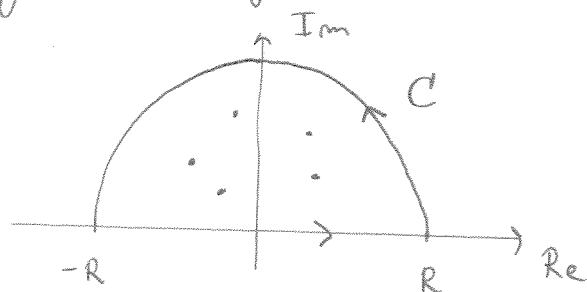
$$\lim_{-\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad \text{missä}$$

summa käy läpi kaikki nollat ylempisessä puolitavossa $\operatorname{Im} z > 0$

Perustelu: $C = [-R, R] \cup C_R$,

missä R on niin suuri, että

$z_1, \dots, z_k$ jäävät C :n sisäpuolelle.



$$\Rightarrow \oint_C \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$\text{Tasmat} \quad \oint_C \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$$

Jos $P(z) = a_p z^p + \dots + a_0$, $Q(z) = b_q z^q + \dots + b_0$, missä

$$q \geq p+2 \quad \text{ja} \quad \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| = \frac{|a_p + a_{p-1}/z + \dots + a_0/z^p|}{|z^{q-p} (b_q + b_{q-1}/z + \dots + b_0/z^q)|}$$

$$\leq \frac{\text{VAKIO}}{R^2}, \quad \text{jos } |z| = R = \text{suuri}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq |\text{FUNCTION MAX}| \cdot \text{KAAREN PITUUS} \leq \frac{\text{VAKIO}}{R^2} \cdot \pi R \rightarrow 0, \quad \text{kun}$$

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0 \Rightarrow \text{VÄITE.}$$

Huom: Täsmä tulkinnan p.v. $\int = \int$.

Grim. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = ?$

Ruth. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ (paritätliche Funktion)

$$1+x^4=0 \Leftrightarrow x^4=-1 \Leftrightarrow x^2=\pm i \Leftrightarrow x = \begin{cases} e^{i\pi/4} \\ e^{i3\pi/4} \\ e^{-i\pi/4} \\ e^{-i3\pi/4} \end{cases} \quad \text{ALENPI POLITASSO}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=e^{i\pi/4}} \frac{1}{1+z^4} + \operatorname{Res}_{z=e^{i3\pi/4}} \frac{1}{1+z^4} \right)$$

$$\operatorname{Res}_{z=e^{i\pi/4}} \frac{1}{1+z^4} = \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/4}} \frac{z - e^{i\pi/4}}{1+z^4}$$

L'Hôpital

$$\downarrow = \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4(e^{i\pi/4})^3} = \frac{1}{4e^{i3\pi/4}} = \frac{1}{4} e^{-i3\pi/4}$$

Samen $\operatorname{Res}_{z=e^{i3\pi/4}} \frac{1}{1+z^4} = \dots = \frac{1}{4} e^{-i\pi/4} = \frac{1}{4} e^{-i\pi/4}$

$$\Rightarrow \text{integrali} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \left(\frac{1}{4} e^{-i3\pi/4} + \frac{1}{4} e^{-i\pi/4} \right)$$

$$= \frac{\pi i}{4} \left(\underbrace{\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}_{-1/\sqrt{2}} + i \underbrace{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}_{-1/\sqrt{2}} + \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{1/\sqrt{2}} + i \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{-1/\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{\pi i}{4} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} i - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}}$$

Huon. $\left| \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^4} \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{Rie^{it} dt}{1+R^4 e^{i4t}} \right| \leq R \int_0^{\pi} \underbrace{|ie^{it}|}_{=1} \underbrace{\frac{1}{|1+R^4 e^{i4t}|}}_{\leq \frac{1}{R^4-1}} dt \leq \frac{\pi R}{R^4-1} \rightarrow 0,$
 kun $R \rightarrow \infty$.

Esim. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = ?$

Ratk. $(1+z^2)^2 = 0 \Leftrightarrow (1+z^2) = 0 \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm i$

Nämä ovat mol. 2-kertaisia, koska

$$(1+z^2)^2 = ((z-i)(z+i))^2 = (z-i)^2 (z+i)^2$$

Vain $z=i$ on ylempään puolitaksoon

$$\text{Res}_{z=i} \frac{1}{(1+z^2)^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z-i)^2}{1+z^4} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z+i)^2} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2(z+i)}{(z+i)^4} = -2 \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z+i)^3} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i}$$

$$\Rightarrow \oint_R f(z) dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

Koska $\oint f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \underbrace{\int_{C_R} f(z) dz}_{\rightarrow 0, \text{ kun } R \rightarrow \infty}$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

Tarkistus: $C_R: |(1+z^2)^2| = |1+z^2|^2 \geq ||z|^2 - 1|^2 = (R^2 - 1)^2$, jos $|z|=R$

$$\Rightarrow \left| \int_{C_R} \frac{dz}{(1+z^2)^2} \right| \leq \underbrace{\pi R}_{1} \cdot \frac{1}{(R^2-1)^2} \rightarrow 0, \text{ kun } R \rightarrow \infty \quad \text{OK}$$

|
puolimarginaalin konvergenssi