

4. Laurent-sarja

Tammiemme jatkoon sarjakehitelmiä myös sellaisien pisteiden lähellä, joihin f ei ole derivoituna tai edes määritetty. Tilanne voi olla hankalampi kuin ed. riem esimerkissä $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

Esim. $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^{1/z}$ on analyyttinen, ja

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!} z^n, \text{ kun } z \neq 0.$$

Potenssisarjat, joihin voi esiintyä myös z :n neg. potensseja, kutsutaan Laurent-sarjiksi. Niitä esiintyy tapauksissa, joihin f :llä on singulariteetti pisteessä z_0 (kts. myösk.)

Def. Olkoot $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ kompleksilukujonot.

Tällöin muotoa $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

oleva sarja kutsutaan Laurent-sarjaksi (pisteeseen z_0 suhteen).

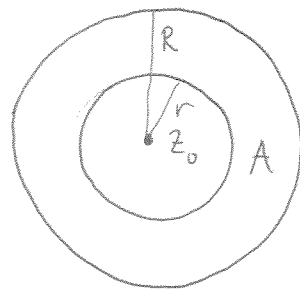
Laurent-sarja syyntee pisteessä $z \neq z_0$, jos mol. sarjat erikseen ovat syyntäviä. Potenssisarjojen teoreett. seurauksena, että syyntämislause on muotoa

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-z_0| < R\}, \text{ missä } 0 \leq r < R,$$

tai $\emptyset$. Luvataan myös voida myyjäisen jossakin A in
 kunnustettiin $|z|=r$ tai $|z|=R$.

$A = \text{"annulus"}$

1. kunnustettiin



Huom: (i) $b_m \equiv 0 \Rightarrow$ tavallinen potenssiry

(ii) jos merk. $C_m = \begin{cases} a_m, m \geq 0 \\ b_{-m}, m < 0 \end{cases}$, niin

rytys tulee muotoon $\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m (z-z_0)^m = \sum_{m=-\infty}^{-1} b_{-m} (z-z_0)^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-z_0)^m$

Esim. $f(z) = \frac{1}{z^3} \ln z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m-2}, z \neq 0$

$$= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} z^2 - \dots$$

↑ VRT.
 Fourier-rytys
 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{imx}$

$\Rightarrow b_2 = 1, b_1 = 0, b_m = 0$ kun $m \geq 3$.

$a_m = \begin{cases} 0, m \text{ pariton} \\ \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+3)!}, m \text{ parill. } m \geq 0 \end{cases}$

"erikoisjako"

Def. Piste $z_0 \in \mathbb{C}$ on funktion f eristetty singulariteetti,

jos f on analyttinen kiekossa $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ jollakin $r > 0$, mutta

eristetty singulariteetti z_0 on f in m -kertainen napa, jos $f(z_0)$ ei määritellä

on olemassa $\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m f(z) \in \mathbb{C}$ jos m on pienin mahdoll. $\in \mathbb{N}$.

Huom: • funktiolla $\log z$ (päähaara) on "singulaarisuuskohta" neg. reaaliakselilla, mutta ne eivät ole eristettyjä.

• funktiolla $\frac{\sin z}{z}$ on pisteessä $z=0$ eristetty singulaarisuuskohta, joka on 0-kertainen napa. Tällaisia sanotaan joskus pistemuodoiksi erikoispisteiksi.

• käsite "n-kertainen napa" voidaan määritellä

myös funktion
$$g(z) = \begin{cases} 0, & z=z_0 \\ 1/f(z), & z \neq z_0 \end{cases}$$
 avulla

vaativalla, että g :llä on z_0 :n n-kertainen nollakohta,

ts. $g(z_0) = g'(z_0) = \dots = g^{(n-1)}(z_0) = 0, g^{(n)}(z) \neq 0.$

(analyttisen funktion nollakohdan kertaluku on aina

äärellinen sarjakehitelmän nojalla; tämä ei päde $\mathbb{R}$:n

C^∞ -funktioille)

• VRT. myös Laurent-sarja: $b_{n+1} = b_{n+2} = \dots = 0, b_n \neq 0 \Rightarrow n$ -kert. napa.

Esim. • Es. sinin funktiolla $\frac{1}{z^3} \sin z$ on pisteessä $z=0$

2-kertainen napa:
$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \left(\frac{1}{z^3} \sin z \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1,$$

mutta $\nexists \lim_{z \rightarrow 0} z \left(\frac{1}{z^3} \sin z \right).$

• Funktiolla $f(z) = e^{1/z}$ on pisteessä $z=0$ eristetty erikoispiste,

joka ei ole napa: $\nexists \lim_{z \rightarrow 0} z^n e^{1/z}$ millään $n \in \mathbb{N}$;

VRT. Laurent-sarja, jossa $b_n \neq 0 \forall n$.

Laurant-sarjan olemassaolo voidaan päätellä seuraavasti:

Lause Jos f on analyyttinen alueen D , josta saatiin

$$\text{rengasalueen } A = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\},$$

niin $\exists a_n, b_n \in \mathbb{C}$ s.e.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \quad r < |z - z_0| < R.$$

Esim. $f(z) = \frac{1}{1-z}$, rengasalueen $0 < |z| < 1$ $\leftarrow (r=0, R=1)$ pätee

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (\text{geom. sarja}),$$

mutta rengasalueen $|z| > 1$ ($r=1, R=\infty$) tämä ei

sopuukaan, vaan

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1/z - 1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - 1/z} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Käyttämällä Laurant-sarja muodostetaan käyttämällä

tunnettuja Taylor-sarjoja sekä osamurtohajotelmaa.

$$\begin{aligned} \text{Esim. } \frac{z-1}{(z+1)(z-2)} &= \frac{1/3}{z-2} + \frac{2/3}{1+z} = \frac{1}{3} (z-2)^{-1} + \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-2)^n \\ &\quad \leftarrow 1+z = 1+(2+(z-2)) = 3+(z-2) = 3(1+(z-2)/2) \right. \\ &\quad \uparrow \\ z_0 = 2 &= \frac{1}{3} (z-2)^{-1} + \frac{2}{9} - \frac{2}{27} (z-2) + \frac{2}{81} (z-2)^2 - \dots \end{aligned}$$

$\downarrow$
Geom. SARJA

5. Residylaskenta

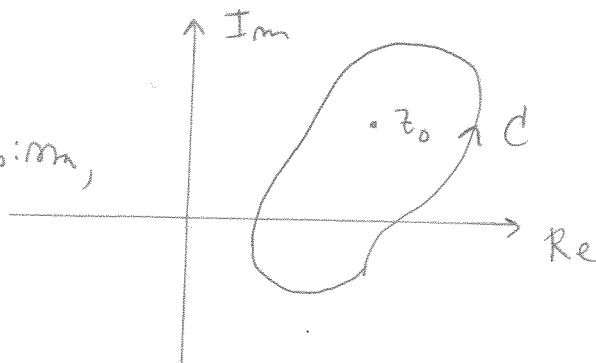
Laurant-sarjan voidaan käyttää integraation laskemiseen,
jollain idea on seuraava:

f :llä ei ole yksikäsitteisiä erik. piste z_0 :on,

käyrä C kiertää z_0 :on

kerroen pos. kiertosuunnan;

$$\oint_C f(z) dz = ?$$



- Cauchy $\Rightarrow$ C voidaan korvata ympyrällä $|z - z_0| = r$
erik. integraali muuttuu

- f voidaan korvata Laurant-sarjalla pisteen z_0
mukaan ja integroida termittain:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n dz + \oint_C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{\oint_C (z - z_0)^n dz}_{=0 \text{ AINA}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n}}_{= \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 2\pi i, & n = 1 \end{cases}}$$

$$= \underline{\underline{2\pi i b_1}}$$

Ainoa termi, jolla on merkittävä integraalim, on

siis $\frac{b_1}{z-z_0}$; kaikki muut häviävät!

Kerrointa b_1 kutsutaan sen suoksi f:n residyksi
(residue = jäännös) pisteessä z_0 ; merk.

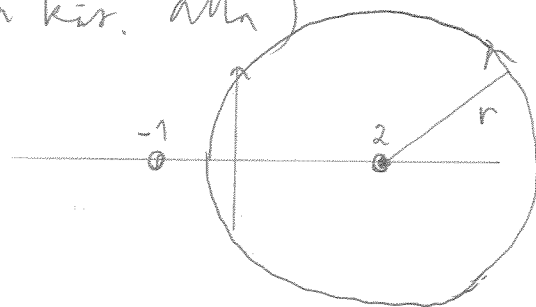
$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1.$$

Esim. (VRT. ED. SIVU) $\operatorname{Res}_{z=2} \left(\frac{z-1}{(z+1)(z-2)} \right) = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \oint_{\partial B(2,r)} \frac{z-1}{(z+1)(z-2)} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3} i}}, \text{ kun } 0 < r < 3$$

$\partial B(2, r)$

(kun $r \geq 3$, toinen napa $z = -1$ jää käyriin sisäpuolelle;
tämä on hankalampi tapaus, jota käsit. alla)



Esim. (VRT. n. 39)

$$\oint_{\partial B(0,r)} \frac{\sin z}{z^3} dz = \underbrace{\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^3}}_{=0} \cdot 2\pi i = 0 \text{ kaikilla } r > 0,$$

koska Laurent-sarjassa ei esiinny $\frac{b_1}{z-0}$ -termiä;

ts. $b_1 = 0$.

Ennen yleisempiä tapauksia ja sovelluksia käsiteltiin
kertomien b_1 nojassa selvitettiin muuttujan z_0 .

1-kertainen napa: Jos z_0 on $f(z)$:n 1-kertainen napa,

$$\text{niin } f(z) = \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots, \quad 0 < |z-z_0| < R.$$

$$\Rightarrow (z-z_0)f(z) = b_1 + a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z-z_0)f(z)).$$

Käytännössä: "supistetaan $f(z)$:n lausekkeesta $(z-z_0)$ ja
sijaitetaan sen jälkeen $z \mapsto z_0$ " $\Rightarrow$ saadaan b_1 .

Esim. Laske $\text{Res}_{z=1} \frac{e^z}{\log z}$ (muuten $\frac{e^1}{0}$, kun $z=1$)

1. havainto: napa on 1-kertainen, koska

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{e^z}{\log z} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 \cdot e^z + (z-1)e^z}{1/z} = e \quad (\text{napa-arvo muuten } \frac{0}{0})$$

Samalla saadaan $\text{Res}_{z=1} \frac{e^z}{\log z} = e$.

Esim. Yhteys osamurtohajotelmaan: jos $f(z) = \frac{P(z)}{(z-a)(z-b)(z-c)}$,

$$\text{missä } \begin{cases} \deg P(z) \leq 2, \\ a, b, c \text{ eri lukuja} \end{cases} \text{ niin } f(z) = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \frac{C}{z-c}, \text{ ja}$$

$$A = \text{Res}_{z=a} f(z) = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)} \text{ jne.}$$

2-kertainen määri: Jos z_0 on f:n 2-kertainen määri,

$$\text{mim} \quad f(z) = \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + \dots, \quad 0 < |z-z_0| < R$$

$$\Rightarrow (z-z_0)^2 f(z) = b_2 + b_1(z-z_0) + a_0(z-z_0)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow b_1 = \left. \frac{d}{dz} ((z-z_0)^2 f(z)) \right|_{z=z_0} \quad \swarrow \quad \lim_{z \rightarrow z_0} = \text{Res } f(z)_{z=z_0}$$

Esim. $\text{Res}_{z=-2} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)^2} = ?$

$$(z+2)^2 \cdot \frac{z}{(z-1)^2(z+2)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right) = \frac{1 \cdot (z-1)^2 - 2(z-1) \cdot z}{(z-1)^4} = \frac{z^2 - 2z + 1 - 2z^2 + 2z}{(z-1)^4}$$

$$= \frac{-z^2 + 1}{(z-1)^4} = -\frac{1+z}{(z-1)^3}$$

$$\lim_{z \rightarrow -2} \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right) = -\frac{1-2}{(-2-1)^3} = \underline{\underline{-1/27}} = \text{Res}_{z=-2} (\quad)$$

m-kert. määri $f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$

$$(z-z_0)^m f(z) = b_m + \dots + b_1(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-z_0)^m f(z)) = (m-1)! \cdot b_1 + m! a_0(z-z_0)^{m-1} + \dots$$

$$\Rightarrow \text{Res } f(z)_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-z_0)^m f(z)) \cdot \frac{1}{(m-1)!}$$