

on jatkuvan funktio D :ssä! Koska g on analyyttinen $D \setminus \{z_0\}$:ssä, niin

$$\int_{\partial \bar{B}(z_0, r_1)} g(z) dz = \int_{\partial \bar{B}(z_0, r_2)} g(z) dz \quad \text{kaikella } 0 < r_1, r_2 \leq r$$

$$\Rightarrow \int_{\partial \bar{B}(z_0, r)} g(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial \bar{B}(z_0, r)} g(z) dz = 0 \Rightarrow \text{VÄITE. } \square$$

↑
syy: jatkuvan funktio,
kaaren pituus $2\pi r \rightarrow 0$.

Voidaan osoittaa, että Cauchyn integraalikaavan derivaatta voidaan siirtää integraalin sisään; näin saadaan

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \left| \frac{d}{dz_0} \right.$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \frac{d}{dz_0} \left(\frac{1}{z - z_0} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz, \dots$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Näistä kaavista saadaan arvio f :n derivantun moduulille:

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{\max |f(z)|}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r$$

$$= \frac{n! M}{r^n}, \quad \text{missä } M = \max_{z \in C} |f(z)| \text{ ympäryksellä } C$$

Seuraus Jos $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on rajoitettu, niin $f(z) \equiv \text{vakio}$.
JA ANALYTTINEN

Syy: Valitaan kaavan $n=1$ ja annetaan $r \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow f'(z_0) = 0 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow f \text{ on vakio. } \square$$

Sovellus: Algebran perusteeseen tod: Jokaisella (ei-vakio) polynomilla on nollakohta $\mathbb{C}$:ssä.

Tod. Vastaoletus: $P(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ jollakin polynomilla P

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{P(z)} \text{ on analyyttinen koko } \mathbb{C}:ssä; \text{ se on}$$

myös rajoitettu, koska $|P(z)| \rightarrow \infty$, kun $|z| \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow f \text{ on vakio} \Rightarrow P \text{ on vakio. } \square$$

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

$$= z^n \left(a_n + a_{n-1}/z + \dots + a_0/z^n \right)$$

$\rightarrow a_n \neq 0$
kun $|z| \rightarrow \infty$

3. Kompleksiset sarjat

Jonon suppeneminen $\mathbb{C}$:ssä: $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \text{ jos oikeam puolen}$$

raja-arvot olemassa.

$$\text{Esim } \lim_{n \rightarrow \infty} e^{i/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(1/n) + i \sin(1/n)) = 1 + 0 \cdot i = \underline{\underline{1}}.$$

Kompleksinen sarja: $z_n \in \mathbb{C}$, mitä tarkoitetaan $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$?

$$\text{Vastaus: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n, \text{ jos } z_n = x_n + iy_n$$

ja sarjat $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ suppenvat.

Päte: Sarjan termien on hyvin samankaltainen kuin $\mathbb{R}$:ssä

- geom. sarja $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, jos $|q| < 1$, $q \in \mathbb{C}$

- suhteetesti: $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ suppenee, jos $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$,

hajautuu, jos $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$.

- $\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, jos oikeam puolen sarja suppenee.

$$\text{Esim. (i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n = \frac{i/2}{1-i/2} = \frac{i/2 \cdot (1+i/2)}{1+1/4}$$

$$= -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i, \text{ koska } \left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

ja olt. puolesta saajat supponent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ supponen

$$\text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot i^n}{2^n} = ? \quad \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \left| \frac{(n+1) \cdot i^{n+1} / 2^{n+1}}{n i^n / 2^n} \right| = \frac{n+1}{2n}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} < 1, \text{ kun } n \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ sarja supponen.

Käytännössä tarkitsemme lähinnä potenssisarjoja; ne ovat muotoa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, missä $z_0 \in \mathbb{C}$ on sarjan keskus ja $a_n \in \mathbb{C}$ sarjan kertoimet.

Supponeminen: Potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ supponen jos

a) koko $\mathbb{C}$:ssä (eli kaikella $z \in \mathbb{C}$)

b) vain pisteessä $z=z_0$

c) jossain kiekkoon $|z-z_0| < R$ ja mahdoll. jossakin kiekkon reunan pisteissä, mutta hajanainen kiekkon ulkopuolella.

Lukua R kutsutaan potenssisarjan suppenemissäteeksi,

$$(i) \Rightarrow R = \infty; \quad (ii) \Rightarrow R = 0.$$

Potenssisarja määritellään siis funktion $f: B(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$,
 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, joka on sarjan summafunktio.

Esim. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$, $R = ?$

Tutkitaan peräkkäisten termien suhdetta:

$$\left| \frac{\frac{1}{n+1} z^{n+1}}{\frac{1}{n} z^n} \right| = \frac{n}{n+1} |z| \rightarrow |z|, \text{ kun } n \rightarrow \infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Siis: } |z| < 1 \Rightarrow \text{suppenee} \\ |z| > 1 \Rightarrow \text{hajautuu} \end{array} \right\} \Rightarrow R = 1$$

Ympäryllä $|z| = R = 1$ sarja hajautuu pisteessä $z = 1$,
 mutta suppenee esim. pisteessä $z = -1$.

$$\leftarrow \text{Esim. 2 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+m}} 2^{2n} \Rightarrow R = \sqrt{3}$$

Suppenemissäteelle pätee

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \text{ jos raja-arvo on olemassa } (0, \infty \text{ ok}),$$

mutta yleensä voi käyttää tavallista suhdetestiä.

Potenssisarjoilla on $\mathbb{C}$:ssä samat ominaisuudet kuin reaalilla potenssisarjoilla:

- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ on kiekossa $B(z_0, R)$ analyyttinen funktio
- potenssisarjassa $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ välttämättä, joten sarja on 1-käsitteinen
- sarjan voi derivoida ja integroida termeittäin suppenemiskiekossa $B(z_0, R)$.

Esim. Eritä funktio $f(z) = \frac{z}{2-z}$ potenssisarjaksi, jonka kiekko on $z_0 = 1$.

Ratk. Kirjoitetaan $z = 1 + (z-1)$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1 + (z-1)}{2 - 1 - (z-1)} = \frac{1}{1 - (z-1)} + \frac{z-1}{1 - (z-1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n + (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$$

$$= \underline{\underline{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (z-1)^n}}, \text{ kun } |z-1| < 1 \text{ (geom. sarja)}$$

Tämän avulla saadaan esim. $2 = a_5 = \frac{f^{(5)}(1)}{5!}$

$$\Rightarrow f^{(5)}(1) = 5! \cdot 2 = 240.$$

Mutta voidaanko jokin analyttinen funktio esittää potenssisarjan summafunktiona?

$$\text{VRT. } \mathbb{R}: f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n$$

joten f :n Taylor-sarja on $\equiv 0 \neq f(x)$, kun $x > 0$.

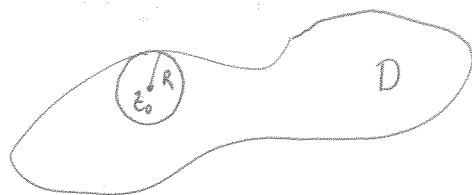
Näin ei voi käydä $\mathbb{C}$:ssä:

Lause Olkoon $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ analyttinen ja $z_0 \in D$. Tällöin

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

kaikella $z \in B(z_0, R)$, missä R = pisteen z_0 lyhin etäisyys reunaan ∂D .

Huom: R = suppeneumisraja, jos D on f :n maksimaalinen mää. alue.

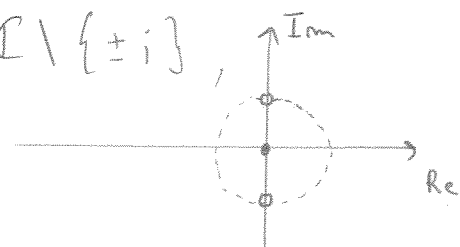


Todistus sovelletaan

Esim. $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ on voimassa kun

$|z| < 1$. Funktion määrittelyjoukko on $D = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$,

ja kokea $z_0 = 0$, niin



$$1 = R = \text{origon etäisyys } \partial D: \text{sti} = |0 - (\pm i)|.$$

Huom: $\mathbb{R}$:ssä $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ määritelty, mutta $\mathbb{R}$ -sarjakin suppenee vain arv. $x \in (-1, 1)$.

Yllä mainittuista tuloksista seuraa, että $\mathbb{R}$ -Taylor-sarjasta saadaan $\mathbb{C}$ -Taylor-sarja korvaamalla $x \mapsto z$! ($z^0 = 1$)

Esim. • $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$, $z \in \mathbb{C}$

• $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ ($0! = 1$) $z \in \mathbb{C}$

• $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$, $|z| < 1$, $\log =$ pääkanta

(idea: $\frac{d}{dz} \log(1+z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \Rightarrow$ integrointi $\Rightarrow$ väite)

• $(1+z)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)}{n!} z^n$, $|z| < 1$

Esim. • $f(z) = ze^{3z} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (3z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{n+1}$, $z \in \mathbb{C}$

(Huom: $a_n = \frac{3^{n-1}}{(n-1)!}$)

• $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ on analyttinen $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:ssä, mutta

Taylor-sarjan mukaan

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{3!} z^2 + \frac{1}{5!} z^4 - \dots, \quad z \neq 0$$

Sarja esittää kuitenkin analyttistä funktiota koko $\mathbb{C}$:ssä, $R = \infty$.

Jos ois määriteltiin $f(0) = 1$, niin saadaan analyttinen funktio $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.