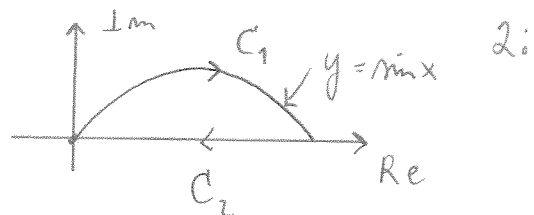


Enn. Loeke $\oint_C (z + \bar{z}) dz$, kun C :



Ratk. $C = C_1 \cup C_2$, joten

$$\oint_C (z + \bar{z}) dz = \int_{C_1} (z + \bar{z}) dz + \int_{C_2} (z + \bar{z}) dz$$

$$C_1: z(t) = t + i \sin t, \quad z'(t) = 1 + i \cos t, \quad t \in [0, \pi]$$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} (z + \bar{z}) dz &= \int_0^\pi (t + i \sin t + t - i \sin t) \cdot (1 + i \cos t) dt \\ &= \int_0^\pi (2t + i 2t \cos t) dt = \pi^2 - 4i \end{aligned}$$

$$C_2: z(t) = \pi - t, \quad t \in [0, \pi], \quad z'(t) = -1$$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} (z + \bar{z}) dz &= \int_0^\pi (\pi - t + \pi - t) \cdot (-1) dt = -2 \int_0^\pi (\pi - t) dt \\ &= -\pi^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \oint_C (z + \bar{z}) dz = \pi^2 - 4i - \pi^2 = \underline{\underline{-4i.}}$$

Huom: Vaikkea $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$ aina, niin tulos $\notin \mathbb{R}$,
koska käyrä $C \notin \mathbb{R}$.

2. Cauchyn integraalilause

Moniston tapauksessa $\int_C f(z) dz$ riippuu kuitenkin vain

C :n päätepisteistä; VRT vektorikentälle

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \nabla \varphi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \varphi(\vec{r}(t)) dt = \varphi(\vec{r}(b)) - \varphi(\vec{r}(a)), \end{aligned}$$

jos $\vec{F}$:lla on potentiaali eli $\exists \varphi$ s.e. $\nabla \varphi = \vec{F}$.

$m=2$ $\vec{F} = f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} \Rightarrow$ potentiaaliehto $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$

näyttää samankaltaista kuin C-R-yhtälö!

Kysymys: voiko joihin samantapaisista olla väärien integraalille $\int_C f(z) dz$, jos f on analyttinen?

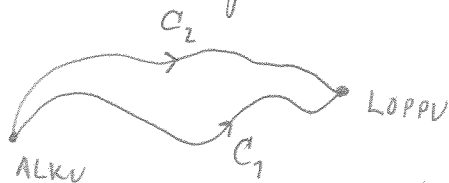
Kyllä; Cauchyn integraalilauseen nojalla (seur. luvun)

Huomaa yhteys: $\int_C f(z) dz$ riippuu vain C :n päätepisteistä

$$\Leftrightarrow \oint_{C'} f(z) dz = 0 \text{ kaikille ympyräisille käynteille } C'$$

C'

Syy:



$$C' = C_1 \cup C_2 - \text{UMPINAINEN}$$

$$0 = \oint_{C'} = \int_{C_1} - \int_{C_2}$$

Cauchyn integraalilause Olkoon $f: D \rightarrow \mathbb{C}$

analyttinen yhdesti yhtenäinen alueen $D \subset \mathbb{C}$,

ja olkoon $C \subset D$ yksinainen suljettu käyrä.

Silloin $\oint_C f(z) dz = 0$.

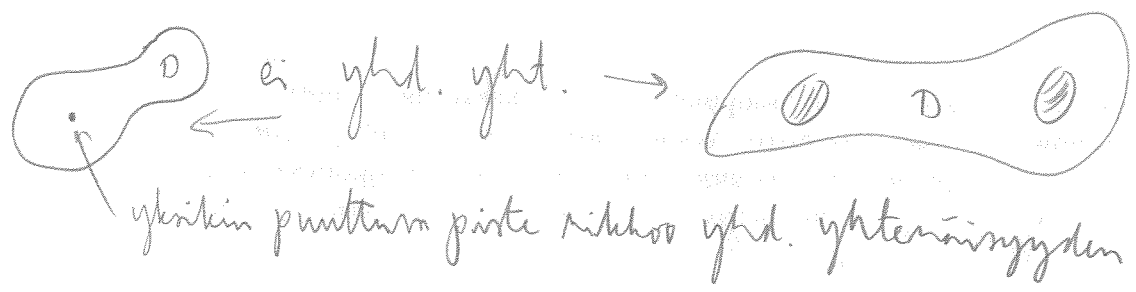
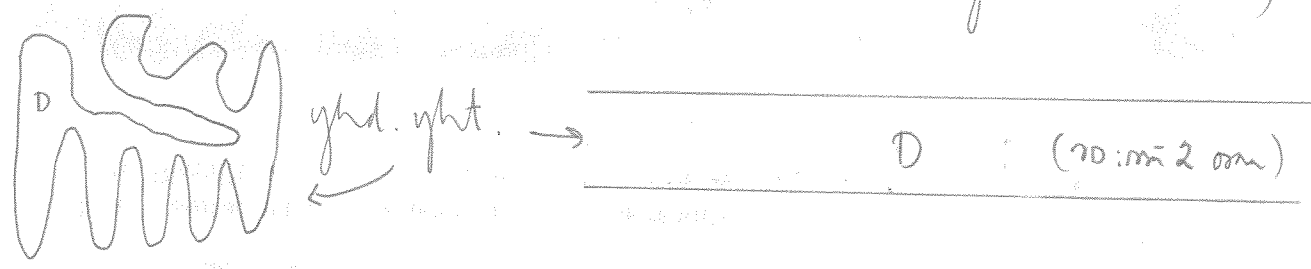
Mitä tarkoittaa yhdesti yhtenäinen?

Intuitio: alueen "ei ole reihtiä", ts. yksinaisen käyrän $C \subset D$ sisäpuoli on kokonaan D :ssä.

Jos D on rajoitettu, niin

D yhd. yht. $\Leftrightarrow \partial D$ on yhtenäinen (eli kootun "yhdesti omista")

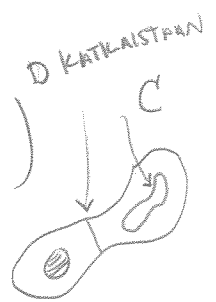
Esim.



Huom. (i) Lauseen tilanteen $\int_\gamma f(z) dz$ riippuu vain γ

käyrän γ päätepisteiden sijainnista (VRT. ed. sivu)

(ii) Lausetta voi soveltaa johonkin pienentämällä aluetta D :



Esim. • aikaisemmin havaittiin, että tulos päde
esim. funktiolle $f(z) = \bar{z}$
 $\Rightarrow$ analyyttisyys tärkeä

• samoin yhdesti yhtenäisyys:

$$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0; \text{ alue } D = \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ ei ole}$$

1-4MPYRÄ

1-yhtenäinen

• kuitenkin $\oint \frac{dz}{z^2+4} = 0$, vaikka $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$

1-4MPYRÄ

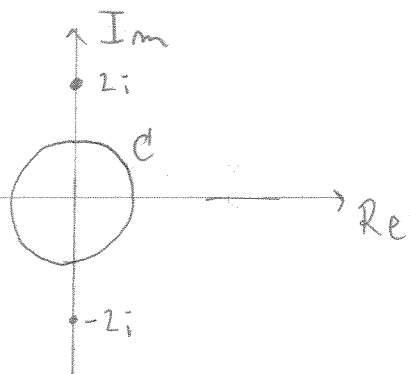
on analyyttinen / määritetty alueessa $\mathbb{C} \setminus \{\pm 2i\}$,

joka ei ole yhdesti yhtenäinen

Syy: käyri C sisältävy

esim. alueeseen $B(0, 3/2)$,

joka on yhdesti yhtenäinen!



Lauren perustelu: Olet. että käyri C leikkaa itsensä j

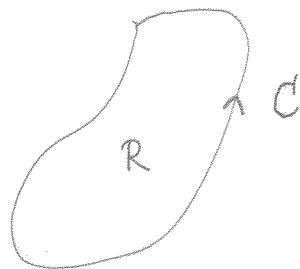
että f on jatkuvasti derivoitava $\Rightarrow$

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (u dy + v dx)$$

GREENIN KAAVA

$$\downarrow = \int_R \underbrace{(-v_x - u_y)}_{=0} dA + i \int_R \underbrace{(u_x - v_y)}_{=0} dA$$

$= 0$ C-R-yhtälöiden nojalla. Yleisemmin tapaus hankalampi. $\square$



Koska analyyttisen funktion integraali riippuu vain
 sen pääty pisteistä, tätä voidaan käyttää monissa
 tapauksissa käyrän C "yhtäkkäistämiseen" ilman
 että $\oint_C f(z) dz$ muuttuu.

Periaate: Jos C voidaan "jatkuvalla tavalla" muuntaa
 käyriksi C' alueen D sisällä, niin

$$\int_C f(z) dz = \int_{C'} f(z) dz \quad \text{analyyttiselle } f,$$

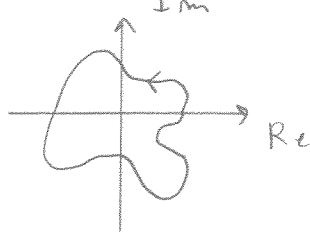
niinhän D olisi 1-yhtenäinen. (sanottuna: C ja C' ovat
 HOMOTOOPISBT)

Selvitämme asiaa esimerkeillä:

Esim. $\int_C f(z) dz = \int_{C'} f(z) dz$, jos $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analyyttinen



(seuraa myös monen Cauchy'n lauseesta)

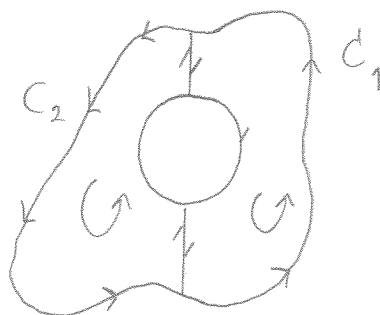
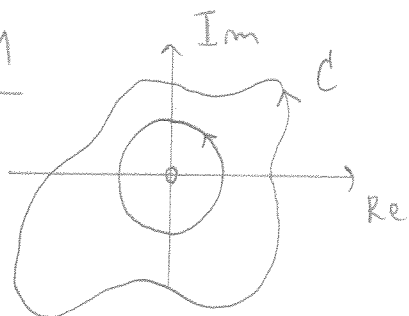
Esim. $\int_C \frac{1}{z} dz = \int_{1-\text{ympyrä}} \frac{dz}{z} = 2\pi i$, jos C : 

Syy: C voidaan pallo kerrallaan muuntaa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:n
 1-ympyräksi.

Esim. Jos $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ on analyyttinen ja
 käyrä C "kierittää oikean kerran vastapäivään",

$$\text{niin } \oint_C f(z) dz = \int_{1\text{-ympäri}} f(z) dz.$$

Perustelu 1



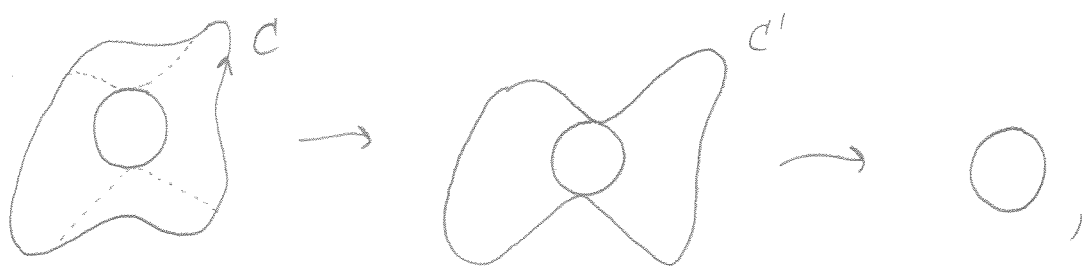
Jaetaan C kahteen osaan ja muod. käyrät C_1, C_2

$$\text{Cauchy'n lause} \Rightarrow \oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz = 0$$

$$\text{Mutta } \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = \oint_C f(z) dz - \oint_{1\text{-ymp.}} f(z) dz$$

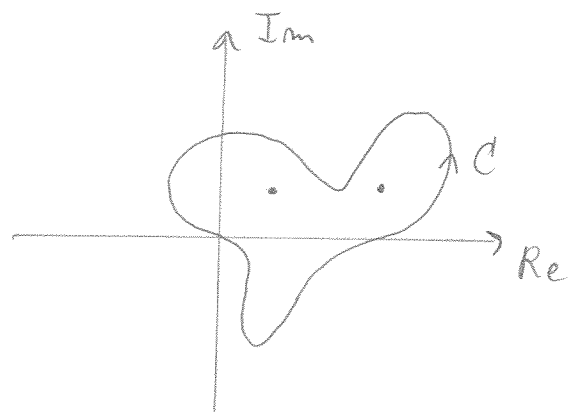
koka jana-osuudet kumoutuvat.

Perustelu 2 Muokataan C riittävän 1-ympäriksi:



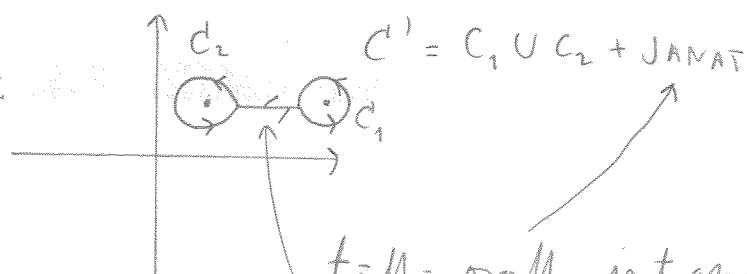
koka muunnoksella käyrällä samaa pisteyhteä $\Rightarrow \oint_C f(z) dz$ sama.

Grim. $f(z) = \frac{2}{z-(3+i)} - \frac{1}{z-(1+i)}$



$$\Rightarrow \oint_C f(z) dz = 2 \oint_C \frac{1}{z-(3+i)} dz - \oint_C \frac{dz}{z-(1+i)}$$

Jathann minnnes:



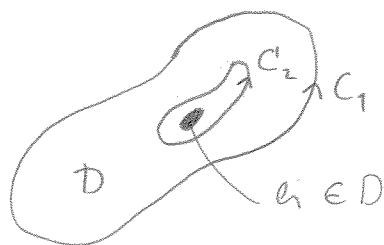
tíðni orðla integrantit
kinnoutvart

$$\Rightarrow \oint_C f(z) dz = 2 \oint_{C'} \frac{dz}{z-(3+i)} - \oint_{C'} \frac{dz}{z-(1+i)}$$

$$2 \left(\underbrace{\oint_{C_1} \frac{dz}{z-(3+i)}}_{2\pi i} + \underbrace{\oint_{C_2} \frac{dz}{z-(3+i)}}_{=0} \right) - \left(\underbrace{\oint_{C_1} \frac{dz}{z-(1+i)}}_{=0} + \underbrace{\oint_{C_2} \frac{dz}{z-(1+i)}}_{2\pi i} \right)$$

$$= 2 \cdot 2\pi i - 2\pi i = \underline{\underline{2\pi i}}$$

Grim.



$f: D \rightarrow \mathbb{C}$ analytiskur

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$



$$\Rightarrow \int_C f(z) dz = 0$$

Tärkein seuraava edellisten tulosten on Cauchyn integraalikaava:

Lause Olkoon $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja $z_0 \in D$, $r > 0$ sellainen, että kiekko

$$\bar{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\} \subset D.$$

Silloin

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

missä $C = \partial \bar{B}(z_0, r)$ pos. suunnan kierrättyinä.

Huom. Aikaisemmin perustella sama tulos on voimassa kaikelle käyrälle $C \subset D$, jotta voidaan jatkuvasti muuntaa $\partial \bar{B}(z_0, r)$:ksi D :ssä.

Tod. $f(z) = f(z_0) + (f(z) - f(z_0))$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

$$= f(z_0) \underbrace{\oint_C \frac{dz}{z - z_0}}_{= 2\pi i} + \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

$$= 2\pi i f(z_0) + \int_C g(z) dz, \text{ missä } g(z) = \begin{cases} f'(z_0), & z = z_0 \\ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & z \neq z_0 \end{cases}$$