

5. Konformikuvaukset

Analyttisten ja harmonisten funktioiden sovelluksissa on konformikuvausten tärkeä merkitys.

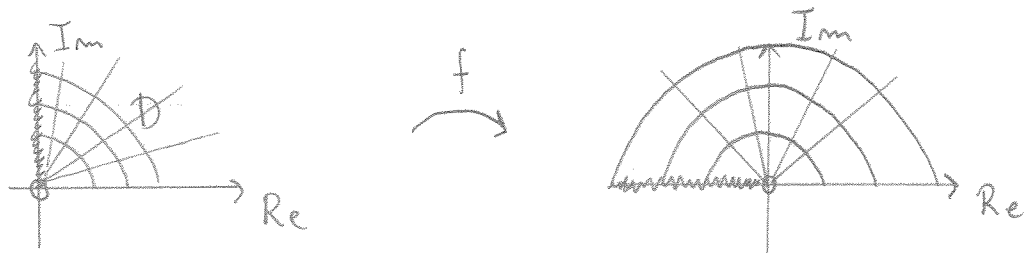
DEF. Olkoot D ja $D' \subset \mathbb{C}$ alueita. Funktio $f: D \rightarrow D'$ on konformikuvaus, jos se on analyttinen bijektio.

$$\left(\begin{aligned} \text{bijektio} &= \begin{cases} \text{injektio: eri pisteisiin eri arvo} \\ \text{surjektio: } D' = fD = f \text{:n arvojoukko} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \text{ käänteiskuvaus } f^{-1}: D' \rightarrow D \end{aligned} \right)$$

Esim. $f: D \rightarrow D'$, $f(z) = z^2$, $D = \{ \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0 \}$

Miten D' pitäisi määritellä, jotta f olisi konformisuus?

$$f(re^{i\varphi}) = r^2 e^{i2\varphi}, \quad r > 0, \quad 0 < \varphi < \pi/2 \Rightarrow r^2 > 0, \quad 0 < 2\varphi < \pi$$



- $r = \text{vakio}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |f(z)| = r^2 = \text{vakio}, \arg f(z) \in (0, \pi).$

$\Rightarrow 1/4$ -ympyrä kuvautuu $1/2$ -ympyräksi

- $\varphi = \text{vakio} \Rightarrow \text{säde} \Rightarrow \arg f(z) = \text{vakio} = \text{säde}.$

Siis: $fD = \{ \operatorname{Im} z > 0 \} = \text{yläpuolinen puolitaso} \equiv D'$ Huom: $f^{-1}(z) = \sqrt{z}$

Huom: Kohtisuoruus säilyy; onko se sattuutua?

Ei de: $f'(z_0) \approx \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$, jos $|\Delta z|$ pieni

$$\Rightarrow f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \approx f'(z_0) \cdot \Delta z,$$

$$\text{joten} \begin{cases} |f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)| \cdot |\Delta z| \\ \arg(f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)) \approx \arg \Delta z + \arg f'(z) \end{cases}$$

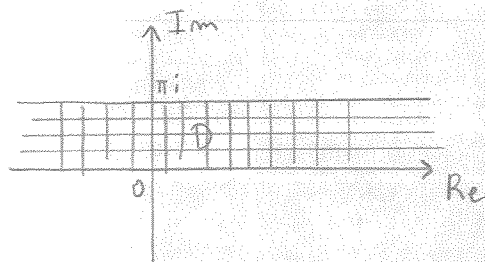
Siir: Lokalisti konformisuus $f: D \rightarrow D'$

- venyttää kertoimella $|f'(z)|$ kaikkiin suuntiin
- kiertää kulmalla $\arg f'(z)$

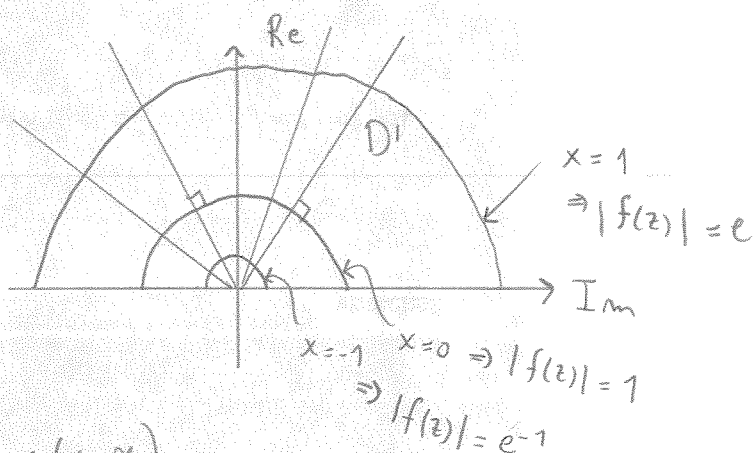
$\Rightarrow$ kohtisuoruus ja kulmat säilyvät (VRT. Mercator)

Esim. $f(z) = e^z$, $D = \{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$, $D' = \{\operatorname{Im} z > 0\}$

$$f(x+iy) = e^x e^{iy}$$



f



$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 < e^x < \infty \Rightarrow |f(z)| \in (0, \infty)$$

$$y \in (0, \pi) \Rightarrow e^{iy} \in \text{ylemmän positiivisen 1-ympyrän on}$$

f on konforminen

$$f^{-1}: D' \rightarrow D \text{ on } f^{-1}(z) = \log z \quad (\text{päähuom, jos } \arg \in (0, \pi))$$

10

Esim. $D = \{ |z| < 1 \}$ = yksikkökiekko, $D' = \{ \operatorname{Re} z > 0 \}$

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z} \quad (\text{määritetty, koska } 1 \notin D)$$

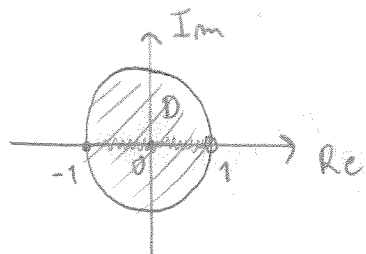
$$f(0) = 1, \quad f(r) = \frac{1+r}{1-r} \in (0, \infty), \quad \text{kun } r \in (-1, 1) \subset \mathbb{R}.$$

Renkaissa: $|z| = 1 \Rightarrow z = e^{it}, \quad 0 < t < 2\pi$

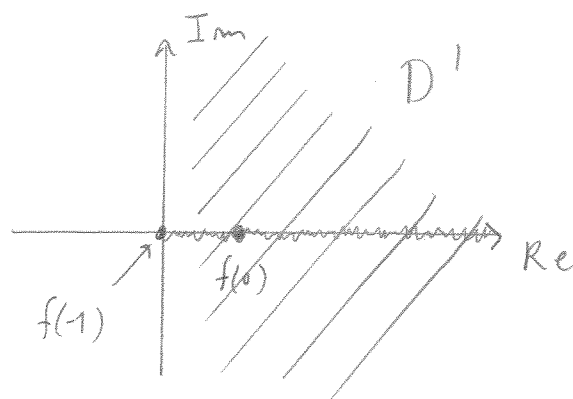
$$f(e^{it}) = \frac{1+e^{it}}{1-e^{it}} = \frac{e^{it/2}(e^{-it/2} + e^{it/2})}{e^{it/2}(e^{-it/2} - e^{it/2})} = \frac{2 \cos(t/2)}{-2i \sin(t/2)}$$

$$= i \cot(t/2) \in (-i\infty, i\infty), \quad \text{kun } 0 < t < 2\pi$$

$$(f(-1) = 0)$$



f



$$(z \rightarrow 1 \Rightarrow |f(z)| \rightarrow \infty)$$

f on bijektio, koska sillä on käänteisfunktio:

$$w = \frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow w - wz = 1 + z \Leftrightarrow w - 1 = z(1+w)$$

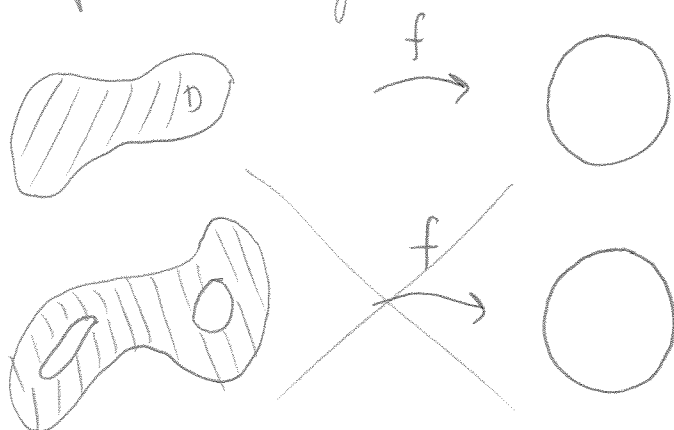
$$\Leftrightarrow z = \frac{w-1}{1+w} \Rightarrow f^{-1}(w) = \frac{w-1}{1+w}, \quad \operatorname{Re} w > 0.$$

Johdatus: "Molemmilla alueilla voidaan kuvata konformisesti toisilleen".

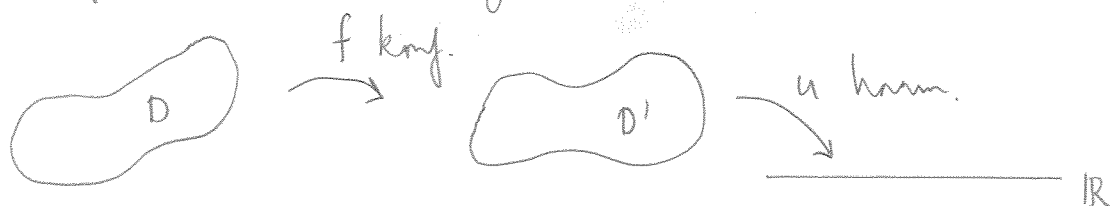
Huom: f konf $\Rightarrow f^{-1}$ konf.

Konformikuvarusten merkitys sovelluksissa perustuu seuraaviin kolmeen tulokseen:

- (i) Riemannin kuvauslause: kaikki tasovalueet (paitsi koko $\mathbb{C}$), josta ei ole "reikiä", voidaan kuvata konformisesti yksikkökehälle $D = \{ |z| < 1 \}$.



- (ii) Konformikuvarus säilyttää harmoniset funktiot:



$\Rightarrow F = u \circ f$ on harmoninen D :ssä

- (iii) Laplace-yhtälölle voidaan ratkaista yksikkökehässä, jos reunan-arvofunktio on jatkuva (Poisson'in integraalikaava)

Perustelut + sovellusten idea: seur. sivu.

((iii) johdetaan myöhemmin))

Idea: halutaan ratkaista $\Delta u = 0$ alueen D , kun

tunnetaan u alueen reunalla ∂D , $u|_{\partial D} = g: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$

Muodotetaan konformikuvaus $f: D \rightarrow B(0,1) = \{ |z| < 1 \}$,

jolloin saadaan $B(0,1)$:n reunafunktio $h = g \circ f^{-1}: \partial B(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$.

Ratkaistaan $B(0,1)$:n $\Delta v = 0$ kahden (iii) kaavan ja reunafunktiolla h . Tällöin funktio

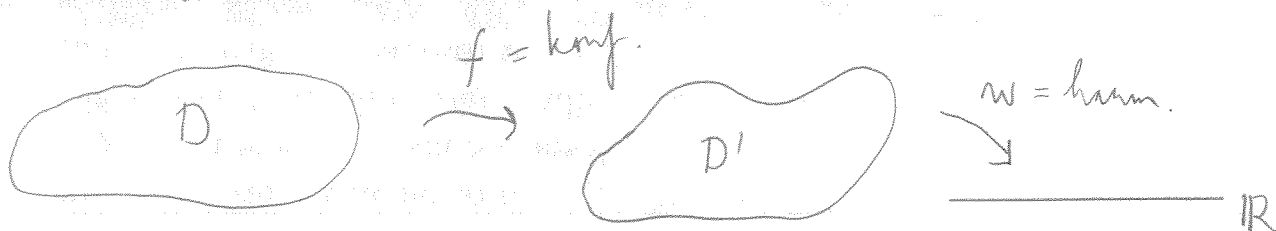
$$u = v \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

on harmoninen (ii) ja reunalla ∂D on

$$u|_{\partial D} = v \circ f|_{\partial D} = (g \circ f^{-1}) \circ f = g \circ (f^{-1} \circ f) = g.$$

$\Rightarrow u$ on haluttu funktio.

(ii):n perusteella:



Väite: $W = w \circ f$ on harmoninen D :n.

Kinj. $f = u + iv$

$$\Rightarrow W(x,y) = w(u(x,y), v(x,y))$$

$$W_x = w_x u_x + w_y v_x, \quad W_{xx} = w_{xx} u_x^2 + w_{xy} u_x v_x + w_x u_{xx} + w_{yx} v_x u_x + w_{yy} v_x^2 + w_y v_{xx}$$

Samaan lask. $W_{yy} = \dots$; käytetään C-R yhtälöitä ja tietoa

$$\Delta u = \Delta v = \Delta w = 0 \Rightarrow \Delta W = 0. \quad \square$$

II Kompleksin integrali

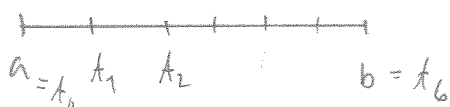
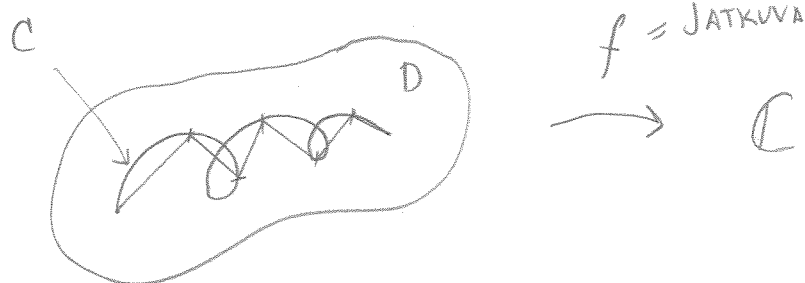
1. Viisintegraali

$\mathbb{R}^2$:n määritelty aikaisemmin $\int_C f ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) |\bar{r}'(t)| dt$

$$\text{j} \int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) dt.$$

Entä funktiolle $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ alue, jolla $C \subset D$ käyrä?

Sama idea kuin aik.



$$z = z(t): [a, b] \rightarrow C \subset D$$

käyrän parametrisointi

Välin $[a, b]$ tasavälinen jako: $t_k = a + k \cdot h$, $h = \frac{b-a}{m}$

$$k = 0, 1, \dots, m$$

Integraalin approksimoiva summa:

$$f(z(t_1))(z(t_1) - z(t_0)) + f(z(t_2))(z(t_2) - z(t_1)) + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^m f(z(t_k))(z(t_k) - z(t_{k-1})) \equiv S_m$$

↑ karttasuoran $\mathbb{C}$:n

Pätee: Jos f on jatkuva ja C suoristuva (= pituus äärellinen), niin on olemassa raja-arvo

$$\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Tämä on funktin viinitegraali pitkin käyrää C .

Jos kyseessä on ympäristöön käyrä ($z(a) = z(b)$),
niin voidaan käyttää merkintää $\oint_C f(z) dz$.

Ominaisuuksia:

- lineaarisuus $\int_C (af(z) + bg(z)) dz = a \int_C f(z) dz + b \int_C g(z) dz$

- riippuvuus suunnasta

$$\int_C f(z) dz = - \int_{C_-} f(z) dz, \text{ jos } C_- \text{ on käyrä}$$

C vastakkaiseen suuntaan parametrisoituna

- jako osakäyriin

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz, \text{ jos } C_1 \text{ on päättyipiste} \\ = C_2 \text{ in alkupiste.}$$

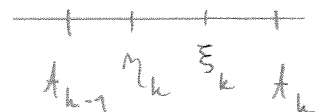
Miten integraali $\int_C f(z) dz$ lasketaan käytännössä?

Tutkitaan summaa S_n reaal- ja imaginaariosien avulla: olkoon $f = u + iv$ ja

$$\Delta z_k = z(t_k) - z(t_{k-1}) = \Delta x_k + i \Delta y_k \quad (z(t) = x(t) + iy(t))$$

Jos $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ ovat derivoituvia, niin väliarvolauseen nojalla

$$\Delta z_k = x'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) + i y'(\eta_k)(t_k - t_{k-1})$$



$$\Rightarrow f(z(t_k)) \Delta z_k$$

$$= u(x(t_k), y(t_k)) x'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) \\ - v(x(t_k), y(t_k)) y'(\eta_k)(t_k - t_{k-1})$$

$$+ i \left(u(x(t_k), y(t_k)) y'(\eta_k)(t_k - t_{k-1}) \right. \\ \left. + v(x(t_k), y(t_k)) x'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b (u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)) dt \\ + i \int_a^b (u(x(t), y(t)) y'(t) + v(x(t), y(t)) x'(t)) dt \\ = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt, \text{ missä } z'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Lasketaan esimerkkejä ja palautetaan mieleen parametrisointia.

Tavalliset parametrisoinnit:

- pisteet $z_1 = x_1 + iy_1$ ja $z_2 = x_2 + iy_2$ yhdistävä jana:

$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in [0, 1]$$

$$z'(t) = z_2 - z_1 \quad (\text{tarkista reaal- ja imaginaariosien arvot!})$$

- ympyrä: $z(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$

$$z'(t) = ie^{it} \quad (\text{HARJ. 2})$$

$$\text{yleisemmin: } z(t) = z_0 + Re^{it} \quad \text{kp} = z_0, \text{ säde} = R$$

$$\text{vastakierroksen kiertosuunta: } e^{it} \rightarrow e^{-it}$$

- ellipsei: $z(t) = z_0 + a \cos t + ib \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$

- funktion $y = f(x)$ kuvaaja: $z(t) = t + if(t), \quad t \in [a, b]$

Esim. (TÄRKEÄ) Laski $\oint_C \frac{dz}{z}$, kun C on origokeskinen ympyrä.

$$z(t) = Re^{it}, \quad z'(t) = iRe^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(t)} z'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} iRe^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = \underline{\underline{2\pi i}}$$

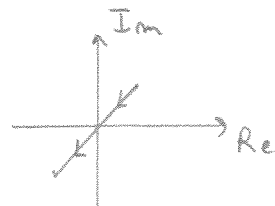
Esim. Sama integraali funktiolle $f(z) = z^m, \quad m \neq -1$.

$$\oint_C z^m dz = \int_0^{2\pi} R^m (e^{it})^m iRe^{it} dt = iR^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt = 0 \quad \text{kaikella } m.$$

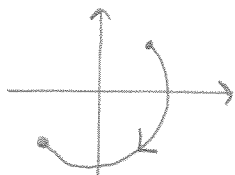
Sis: $\oint_C z^m dz = \begin{cases} 0, & m \neq -1 \\ 2\pi i, & m = -1 \end{cases}$ kun C on origokeskinen
ympyrä, pos. kiertoaika

Esim. Laske $\int_C \bar{z} dz$, kun

a) C : pisteet $1+i$ ja $-1-i$ yhdistävä jana



b) C : ympyräkaarri



Ratk. a) $z(t) = 1+i + t((-1-i) - (1+i)) = 1+i - t(2+2i)$

$$\Rightarrow z'(t) = -2-2i$$

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^1 (1-i - t(2-2i))(-2-2i) dt$$

$$= \int_0^1 (-4+8t) dt = 0$$

b) $z = \sqrt{2} e^{-it}$, $t \in [-\pi/4, \frac{3\pi}{4}]$ (TARK: $z(-\pi/4) = \sqrt{2} e^{i\pi/4} = 1+i$
 $z(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2} e^{-i3\pi/4} = -1-i$)

$$z'(t) = -i\sqrt{2} e^{-it}$$

$$\int_C \bar{z} dz = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{2} e^{it} (-i\sqrt{2} e^{-it}) dt = -2i \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} 1 dt = -2\pi i$$

Seuraav. Integraalin arvo riippuu (alustakin jatkuv.)

käyrästä C , näiden päätepisteet olisivat samat.