

Ominais arvojen sovelluksia: Differentiaaliyhtälöryhmät

Tässä luentopäivä tarkastellaan allua amotehtävää $\mathbb{R}^n$:ssä:

Etsi kuvaus $x: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, joka toteuttaa

$$x'(t) = f(x(t), t); \quad x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n.$$

Tämä

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}, \quad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Sanotaan, että yhtälö on autonominen, jos f riippuu ajasta vain $x(t)$:n kautta.

Esimerkki Systemi

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)^2 \\ x_2'(t) = 2x_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

on autonominen, $f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 2x_1x_2 \end{bmatrix}$,

kuusitussysteemi

$$\begin{cases} x_1'(t) = e^{-t} x_1(t) \\ x_2'(t) = e^{-2t} x_1(t) x_2(t) \end{cases}$$

ei ole autonominen, koska

$$f(x, t) = \begin{bmatrix} e^{-t} x_1 \\ e^{-2t} x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

riippuu ajasta t , vaikka x_1 ja x_2 olisivat ajan
suhdetta vakioita.

Systemi $x' = f(x)$ on lineaarinen, jos

$$f(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Muutama tarkastelee lineaarisista systeemeistä.

Tarkastetaan on siis ratkaisu ongelmaa

$$x' = Ax, \quad x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n$$

Oletetaan, että A :lla on ominaisarvo ja
-vektori $\lambda \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{C}^n$

Tehdään yritte

$$x(t) = g(t)v, \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

Sijoitus:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \underline{g'(t)v} = A(g(t)v) = g(t)Av \\ &= \underline{\lambda g(t)v} \end{aligned}$$

Nähdään, että yhtälö toteutuu, jos g toteuttaa
samallisen diff. yhtälön

$$g'(t) = \lambda g(t)$$

Tämä on tavallinen separaation avulla:

$$\frac{dg}{g} = \lambda dt \Rightarrow g(t) = Ce^{\lambda t}, \quad C = \text{vakio.}$$

Entä alkuehto? Nyt tulee ongelmaksi, sillä
pitäisi olla

$$g(0)v = Cv = x^0,$$

eikä tällä yhtälöllä ole ratkaisua C , jos

$v \notin x^0$. Nähdään, että tarvitaan paljon useampi

riittävä ratkaisuja kuin yläsi.

Oletetaan nyt, että A :lla on ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (joista osa voi olla yhtäsuuria, ja oletetaan, että löydetään myös n kpl ominaisvektoria, $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$.

Kuten edellä toimitaan, että vektori funktiot

$$x^j(t) = c_j e^{\lambda_j t} v_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

ovat yhtälön $x' = Ax$ ratkaisuja. Etsitään ratkaisun esitys lineaarikombinaationa,

$$x(t) = \sum_{j=1}^n x^j(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} v_j.$$

Alkuehto toteutuu, jos

$$x(0) = \sum_{j=1}^n c_j v_j = x^0. \quad (*)$$

Määritellään matriisi $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ siten, että sen j :s sarakke on v_j ,

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

ja kerronvektori

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Yhtälö (2) matriisimuodossa on

$$VC = x^0.$$

Tällä on ratkaisu C aina, jos V on kääntyvä, ts. ominaisvektit v_j ovat lineaarisesti riippumattomia

Esimerkki: Ratkaisu

$$\begin{cases} x_1' = -5x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Matriisimuodossa $x' = Ax$,

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Ominaisarvot ja -vektit:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (5+\lambda)(2+\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 6} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-24}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{5}{2} \begin{matrix} -6 \\ -1 \end{matrix}$$

Eigenwert:

$$\underline{\lambda = -6}: \quad Au = -6u \Rightarrow \begin{cases} -5u_1 + 2u_2 = -6u_1 \\ 2u_1 - 2u_2 = -6u_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 + 2u_2 = 0 \\ u_1 + 2u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 = -2u_2; \text{ Wähle } u = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda = -1}: \quad Av = -v \Rightarrow \begin{cases} -5v_1 + 2v_2 = -v_1 \\ 2v_1 - 2v_2 = -v_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2v_1 - v_2 = 0 \\ 2v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_2 = 2v_1; \text{ Wähle } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ratherem on

$$x = c_1 e^{-6t} u + c_2 e^{-t} v$$

Alternativ

$$x(0) = c_1 u + c_2 v = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

di:

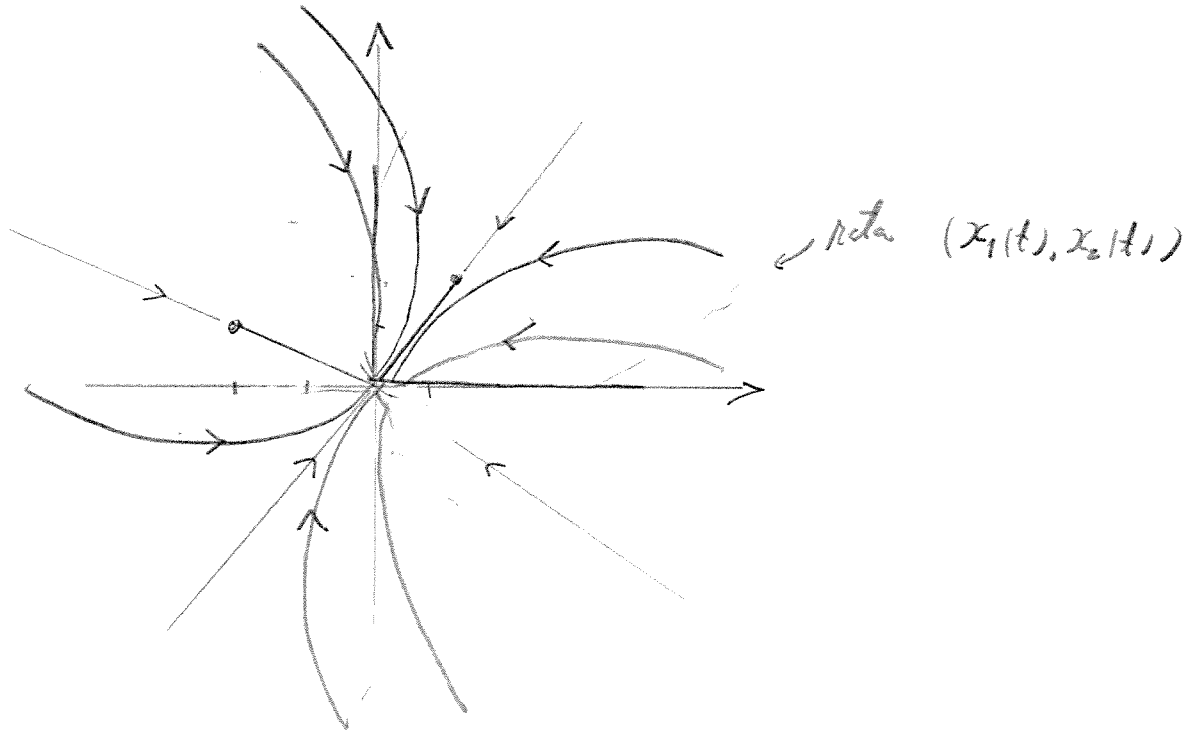
$$\begin{cases} -2c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases}$$

$$5c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1/5$$

$$c_1 = -2c_2 = -2/5$$

$$\underline{x(t) = -\frac{2}{5} e^{-6t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

Kahden muuttujan tapauksessa (i.e. $x(t) \in \mathbb{R}^2$) voidaan ratkaisun vektoreita graafisesti es. viitekurvina, eli faseikuvana



Sanoimme, että origo on sinkki (sink), jos $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

Esimerkki: $x' = Ax$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

Ominaisarvot ja -vektorit:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Eigenwert berechnen:

$$A u = \lambda u \Rightarrow \begin{cases} 2u_1 - 4u_2 = \lambda u_1 \\ u_1 - 3u_2 = \lambda u_2 \end{cases} \Rightarrow u_1 = 4u_2 ;$$

Wahl von

$$u = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A v = -2v \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 - 4v_2 = -2v_1 \\ v_1 - 3v_2 = -2v_2 \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_2$$

Wahl von

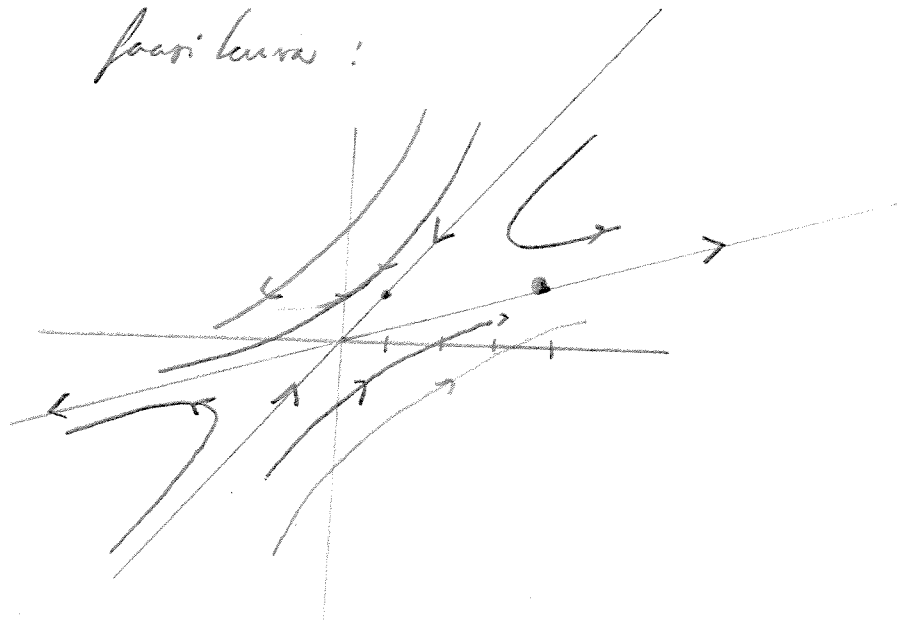
$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

allgemeine Lösung von (1)

$$x(t) = c_1 e^t u + c_2 e^{-2t} v$$

$$= c_1 e^t \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hasenplot der Trajektorien:



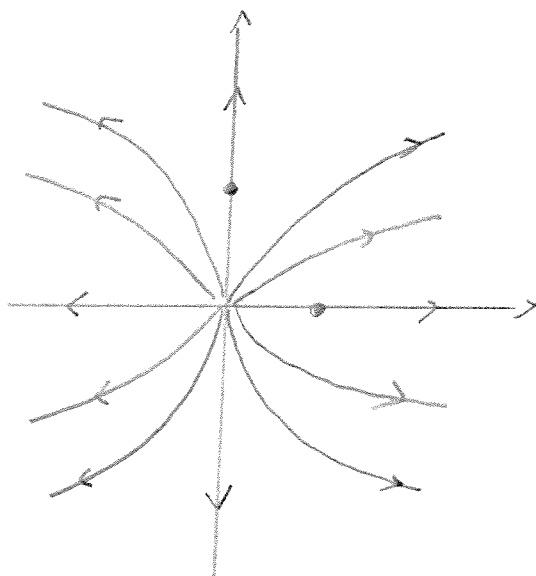
Kui omnisarv on stabiilsus, $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$
 punkt, ette origo on stabiilsus.

Exm. $x' = Ax$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Täna loogiline omnisarv stabiilsus Leti,
 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, ja omnisarv stabiilsus Lää

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Faasid



$$x(t) = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kui $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, punkt, ette origo on
stabiilsus.

Esimerkiksi:

$$x' = Ax,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \lambda = \pm 2i$$

Ominaisvektorit:

$$Av = \pm 2i v \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} v_2 = \pm 2i v_1 \\ -4v_1 = \pm 2i v_2 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \quad v_2 = \pm 2i v_1$$

Valitaan

$$v_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}, \quad v_- = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$$

Yleinen ratkaisu on kompleksimuotoon

$$x(t) = C_1 e^{2it} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} + C_2 e^{-2it} \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$$

Alkuperäinen tehtävä oli reaalisuhteinen, ja yleensä pyritään ratkaisemaan heittoa C_1 ja C_2 siten, että lopputulos olisi reaaliarvoinen.

Eulerin kaava:

$$e^{\pm 2it} = \cos 2t \pm i \sin 2t$$

antaa

$$x(t) = \left(C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} \right) \cos 2t \\ + \left(iC_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} - iC_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} \right) \sin 2t$$

Merkitään

$$C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 \\ 2i(C_1 - C_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

jolloin

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \alpha \\ C_1 - C_2 = -\frac{1}{2}i\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}i\beta \\ C_2 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}i\beta = \overline{C_1} \end{cases},$$

ja niin korvaamalla on

$$iC_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} - iC_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(C_1 - C_2) \\ -2(C_1 + C_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\beta \\ -2\alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Recalismatori pethaim an püs

$$x(t) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\beta \\ -2\alpha \end{bmatrix} \sin 2t$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2 \sin 2t \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2 \sin 2t \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\beta \begin{bmatrix} \sin 2t \\ 2 \cos 2t \end{bmatrix};$$

Nānā pethaimt ont origon kintamā ellipti-
patoja :

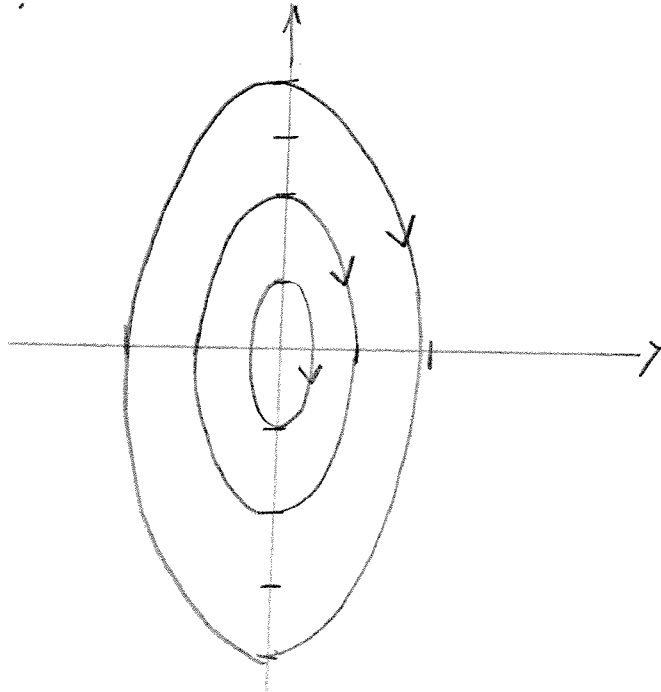
$$x_1^2 + \frac{1}{4} x_2^2 = (\alpha \cos 2t + \frac{1}{2}\beta \sin 2t)^2 \\ + \frac{1}{4} (-2\alpha \sin 2t + \frac{1}{2}\beta \cos 2t)^2$$

$$= \alpha^2 (\cos^2 2t + \sin^2 2t) + \left(\frac{1}{2}\beta\right)^2 (\sin^2 2t + \cos^2 2t)$$

$$= \alpha^2 + \left(\frac{1}{2}\beta\right)^2 = \text{value.}$$

Kas omicariant ont unagimant, $\lambda = \pm i\mu$,
 $\mu \in \mathbb{R}$, nanon, etā origo on heskus.

Facsimile:



(Nähti, miten kiertoasenteen vähyys vaikuttaa A)

Esimerkki:

$$x' = Ax,$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ominisarvat ja -vektorit:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \pm i$$

$$Av = (-1 \pm i)v \Rightarrow \begin{cases} -v_1 + v_2 = (-1 \pm i)v_1 \\ -v_1 - v_2 = (-1 \pm i)v_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_2 = \pm i v_1 \quad ; \quad v_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad ; \quad v_- = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad ;$$

Uplinus rathain kompleksimutasa

$$x(t) = C_1 e^{(-1+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + C_2 e^{(-1-i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$= e^{-t} \left\{ C_1 e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + C_2 e^{-it} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}$$

Vahilam kutun adalhinu: $C_2 = \overline{C_1}$;

ehi $C_1 = \alpha + i\beta$, $C_2 = \alpha - i\beta$

$$x(t) = e^{-t} \left\{ (\alpha + i\beta) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{it} + (\alpha - i\beta) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{-it} \right\}$$

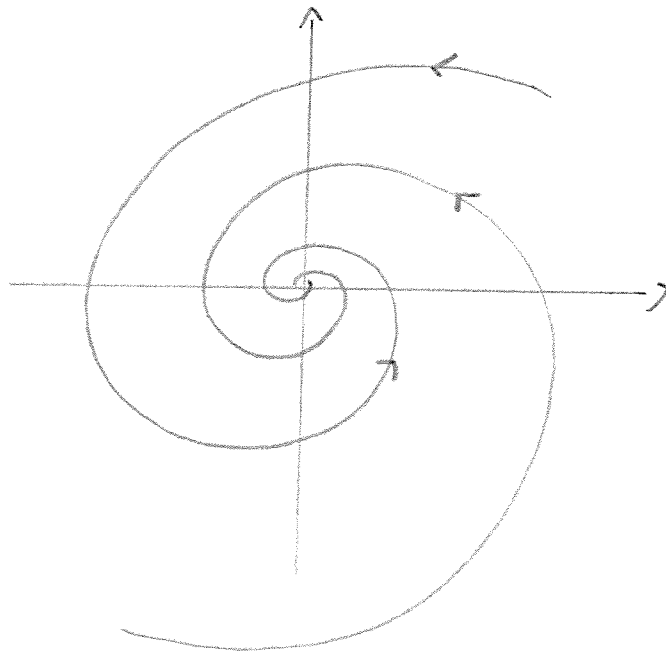
$$= e^{-t} \begin{bmatrix} \alpha (e^{it} + e^{-it}) + i\beta (e^{it} - e^{-it}) \\ i\alpha (e^{it} - e^{-it}) - \beta (e^{it} + e^{-it}) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-t} \begin{bmatrix} 2\alpha \cos t - \beta \sin t \\ -2\beta \sin t - \alpha \cos t \end{bmatrix}$$

Oms helppe todistaa, että

$$t \mapsto \begin{bmatrix} \alpha \cos t - \beta \sin t \\ -\alpha \sin t - \beta \cos t \end{bmatrix}$$

on origokeskeistä ympyräliikettä. Termi e^{-t} taas pienenee, kun $t \rightarrow \infty$. Tästä seuraa



Kun $\lambda = \lambda_{\pm} = \gamma \pm i\mu$, niin origo on polku. Jos $\gamma < 0$, sanotaan, että origo on stabiili polku, ja taas $\gamma > 0$, on se epästabiili polku.

Edellisessä esimerkissä löydettiin ainut n. k. yl. lineaarista riippumattomia ominaisvektoria. Näin ei yleensä ole, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki: $x' = Ax$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

A on Jordanin matriisi, josta ominaisarvot ovat $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Ominaisvektori

$$Av = 2v \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} 2v_1 + v_2 = 2v_1 \\ 2v_2 = 2v_2 \end{cases}$$

$(\Rightarrow) \quad v_2 = 0$. Siis ainut lineaarisesti riippumattomien vektoreiden joukko on $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, jota vasten

ratkaistaan

$$x'(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Toinen ratkaisu: Tehdään ylitse

$$x^2 = t e^{\lambda t} v + e^{\lambda t} u$$

Sijoitetaan:

$$\begin{aligned} x' &= e^{\lambda t} v + t \lambda e^{\lambda t} v + \lambda e^{\lambda t} u \\ &= A(t e^{\lambda t} v + e^{\lambda t} u) \\ &= t \lambda e^{\lambda t} v + e^{\lambda t} A u, \end{aligned}$$

eli u :n tulee toteuttaa

$$(A - \lambda I)u = v.$$

Nyt yleisesti $A - \lambda I$ ei ole kääntyvä, joten emme voi hypottaa ratkaisunsa kääntämällä sen. Osoitamme kuitenkin, että lähtöyhtälöllä on aina ratkaisu:

$$(A - \lambda I)u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} u_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$u_2 = 1$, valitaan esim.

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

eli

$$x^2 = t e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

gives relationship on x_1 and x_2

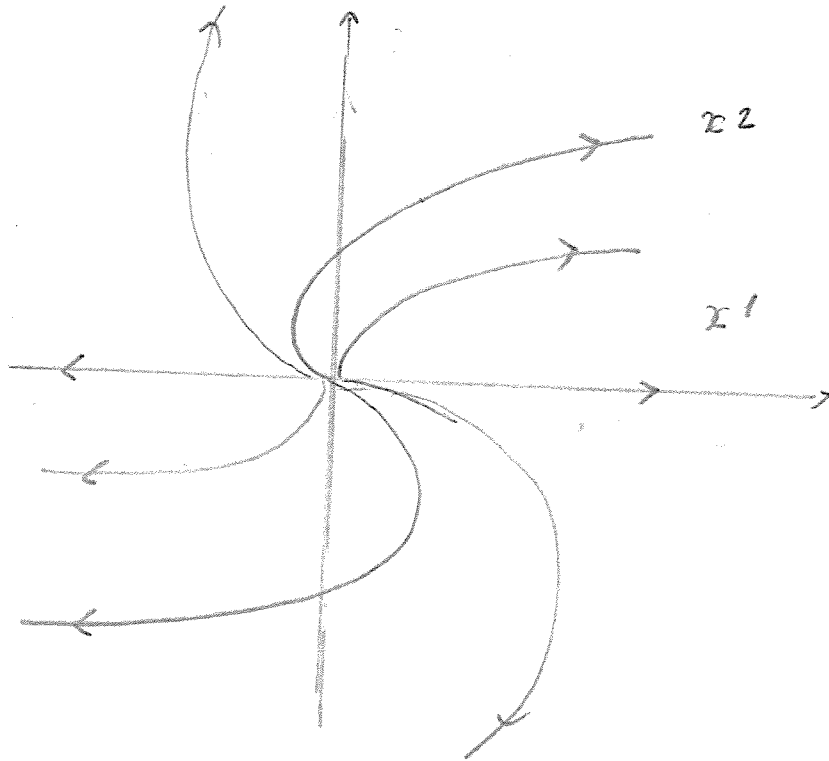
$$x = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= e^{2t} \begin{bmatrix} C_1 + t C_2 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$$

Factorization:

lät de.



Emiss: $x' = Ax$, $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) + 1$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

Omniaisvektör:

$$Av = 3v \Rightarrow \begin{cases} 4v_1 + v_2 = 3v_1 \\ -v_1 + 2v_2 = 3v_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_1 = -v_2 \quad ; \quad \text{Välj } v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Så

$$m_a(3) = 2, \quad m_g(3) = 1.$$

Yhøi räkna om $x^1(t) = e^{3t}v$

Toim räkna uttulla

$$x^2(t) = (tv + u)e^{3t}$$

$$\frac{dx^2}{dt} = v e^{3t} + 3(tv + u)e^{3t} = Ax^2$$

$$= \underbrace{(tAv + Au)}_{=3v} e^{3t} = (3tv + Au)e^{3t},$$

di

$$\underbrace{(A - 3I)}_{= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}} u = v \quad \Rightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 = v_1 = 1 \\ -u_1 - u_2 = v_2 = -1 \end{cases}$$

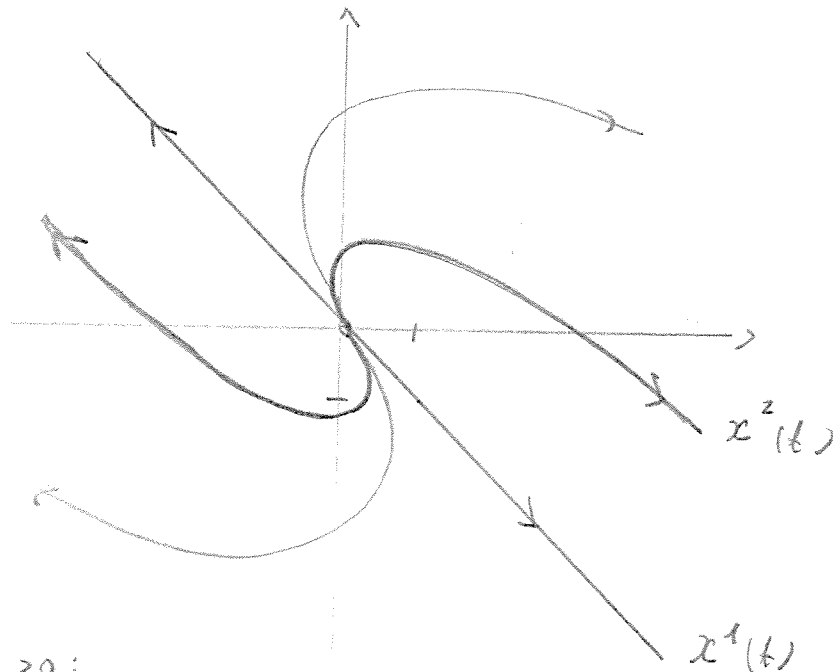
$$\Rightarrow u_1 + u_2 = 1; \quad \text{Välj } u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Yleis ratkaisu on

$$x(t) = C_1 x^1(t) + C_2 x^2(t)$$

$$= \left\{ (C_1 + C_2 t) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} e^{3t}$$

Esimerkki:



Jos $C_2 > 0$:

- kun $t \rightarrow \infty$, ratat kääntyvät 0 in suuntaan.
- kun $t \rightarrow -\infty$, ratat kääntyvät $-\infty$ in suuntaan.

Eyälinciset yhtöryhmät

Tarkastellaan muunmuassa autonomista yhtötön

$$x'(t) = f(x(t)), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}^n$ piste, jolla

$$f(x_0) = 0$$

Tällöin ollen annettu nollä

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

on Ratkaisun vakio

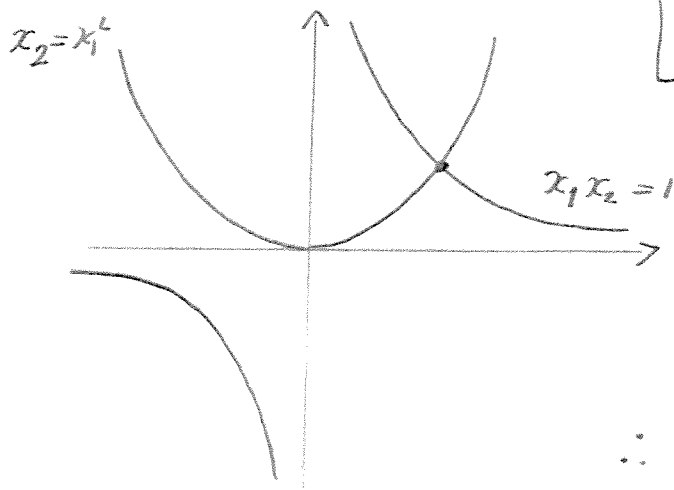
$$x(t) = x_0 = \text{vakio},$$

Es. x_0 on eräntään lasaparioli la. Tällöin
yritettä lntontaan systeemi kiittisetti pistee bori

Esimerkki:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1 x_2 - 1 \\ x_2'(t) = x_1^2 - x_2 \end{cases}$$

Kiittisetti piste : $\begin{cases} x_1 x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{x_1}, x_1 \neq 0 \\ x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases}$



$$x_1^2 - \frac{1}{x_1} = 0 \Rightarrow x_1^3 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = 1$$

$$\therefore (x_1, x_2) = (1, 1).$$

Kysytään nyt: Mitä tapahtuu, jos allu pistettä poikennutetaan liian tasapaino tilään?

Pieniä poikennutuksia voidaan tutkia lineari-
säällä. Käytetään Taylorin polynomi approksi-

maatio: Kun $x = x_0 + y$, y pieni poikkeama, niin

$$f(x) = f(x_0 + y)$$

$$\approx \underbrace{f(x_0)}_{=0} + Df(x_0)y = Df(x_0)y$$

Kun $Df(x_0)$ on fin differentiaali,

$$Df(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

Kun $x_0 = \text{vakio}$, niin

$$x' = \frac{d}{dt}(x_0 + y) = y'$$

eli poikennut y toteuttaa approksimaatiivisesti
lineaarisen yhtälön

$$y'(t) = \underbrace{Df(x_0)}_{=A} y(t) = Ay(t).$$

Kiintinen piste $x = x_0$ vastaa origoa $y = 0$,
ja se on stabiilisuus käyppä. Ainakin olemassa.

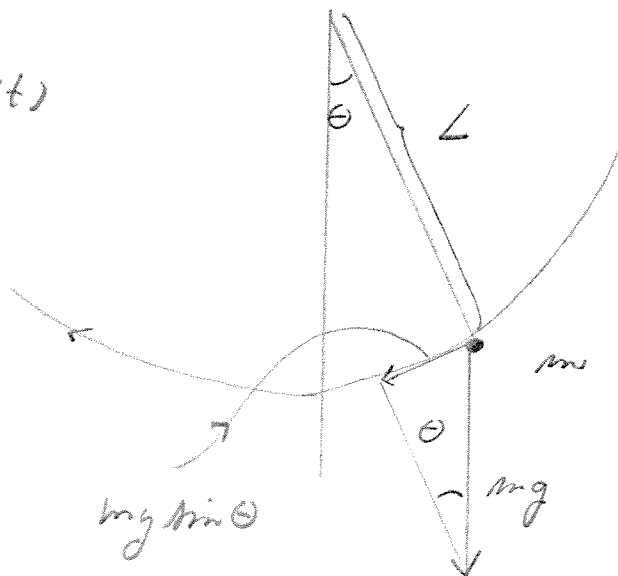
Esimerkki: Heiluri:

$$F = ma, \quad F = -mg \sin \Theta(t)$$

$$a = a(t) = \frac{dv}{dt} = v'$$

$$v = v(t) = \frac{d}{dt} (\angle \Theta(t))$$

$\Theta(t)$ = potkeman kulma radia-
nna. Siis



$$\begin{cases} v' = -g \sin \Theta \\ \Theta' = \frac{1}{L} v \end{cases}$$

Maatilan $x_1(t) = \Theta(t); \quad x_2(t) = \frac{1}{L} v$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -k \sin x_1, \quad k = \frac{g}{L} \end{cases}$$

Kiintiset pisteet:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ k \sin x_1 = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x_1 = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Differentiali: $f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -k \sin x_1 \end{bmatrix}$

$$Df = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k \cos x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sij. $x = x^{(n)} = (n\pi, 0)$

$$Df(x^{(n)}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k \cos n\pi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1}k & 0 \end{bmatrix}$$

Ominaisaroot:

u pariton.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix}; \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ k & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - k = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{k}$$

Opijo on systeemin satulapiste

u parillisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix}; \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 + k = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{k}$$

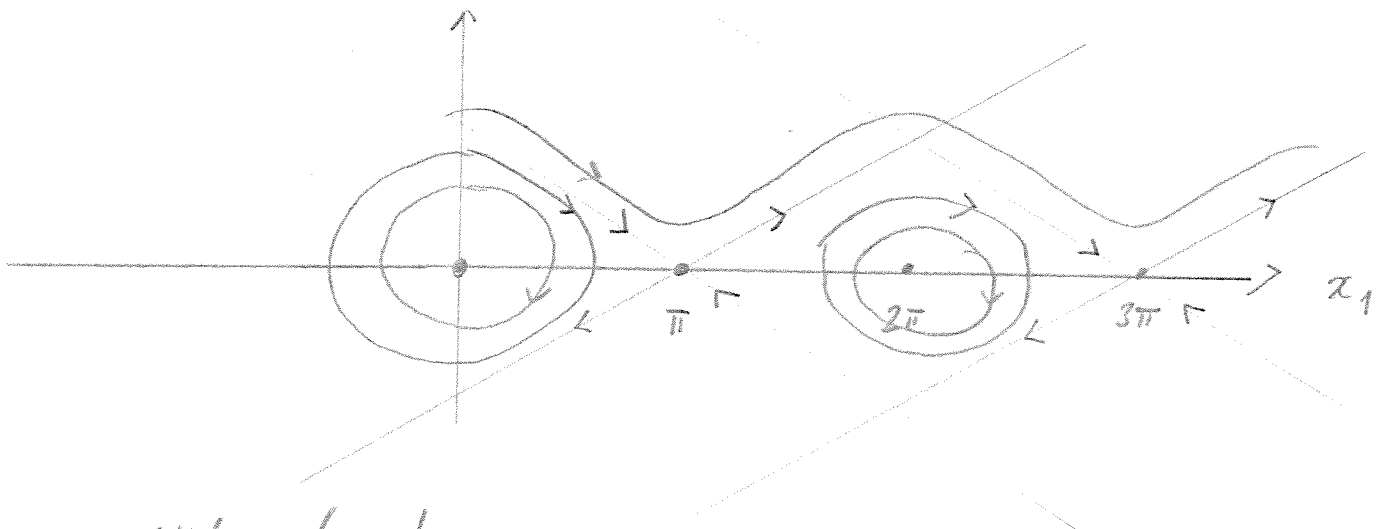
Opijo on systeemin keskus.

Fazit: Lasten an omnidirektionaler Antenne -
gerichtet.

$$Av = \pm \sqrt{k} v \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = \pm \sqrt{k} v_1 \\ k v_1 = \pm \sqrt{k} v_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow v_2 = \pm \sqrt{k} v_1$; Omnidirektionaler Antenne

$$v_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{k} \end{bmatrix} \quad v_- = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{k} \end{bmatrix}$$



Tabellen lesen!

Enn: Lisätään edellisen vaimennusmallin vaimennus

$$F_{\text{vaimennus}} = -c \underbrace{\angle \theta'}_{=v}, \quad c = \text{vakio},$$

ts. vaimennusvoima on vääntömomentin
negatiivinen. Nyt siis

$$\begin{aligned} F_{\text{tot}} &= -mg \sin \theta - c v \\ &= m a = m v' \end{aligned}$$

eli

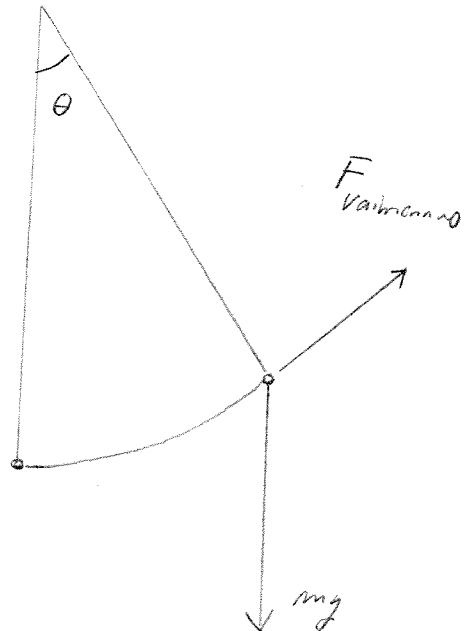
$$\begin{cases} v' = -\frac{c}{m} v - g \sin \theta \\ \theta' = \frac{1}{L} v \end{cases}$$

Taas, kun merkitään $x_1 = \theta$, $x_2 = \frac{1}{L} v$, saadaan
systemi

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\underbrace{\frac{c}{m}}_{=\gamma} x_2 - \underbrace{\frac{g}{L}}_{=k} \sin x_1 = -\gamma x_2 - k \sin x_1 \end{cases}$$

Kritiikki pisteet:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -\gamma x_2 - k \sin x_1 = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad (x_1, x_2) = (n\pi, 0), \quad n \in \mathbb{Z}$$



Lasketaan differentiaali:

$$f_1(x) = x_2 ; \quad f_2(x) = -\gamma x_2 - k \sin x_1$$

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k \cos x_1 & -\gamma \end{bmatrix}$$

n värillinen:

$$A = Df(2n\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\gamma \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k & -\gamma - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + \gamma) + k$$

$$= \lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - k} = \lambda_{\pm}$$

Nähdään, että kiittesin pöten luonne rööppun
varmuus termis pötenkoston;

$$(a) \quad \frac{\gamma^2}{4} - k \geq 0 \quad \text{eli} \quad \gamma > \sqrt{2k}$$

Tämä pöten varmuus varmuus: Nyt

$\lambda_{\pm} < 0$, eli kysymä on mukaan

$$(b) \quad \frac{\gamma^2}{2} - k = -\mu^2 < 0 \quad \text{eli} \quad \gamma < \sqrt{2k}$$

Tässä on heikkos vaimennus:

$\lambda_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\mu$, eli leypää on stabiili foku.

matr pariton: $A = Df((2n+1)\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & -\gamma \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ k & -(\gamma + \lambda) \end{vmatrix} = \lambda(\gamma + \lambda) - k$$

$$= \lambda^2 + \gamma\lambda - k = 0$$

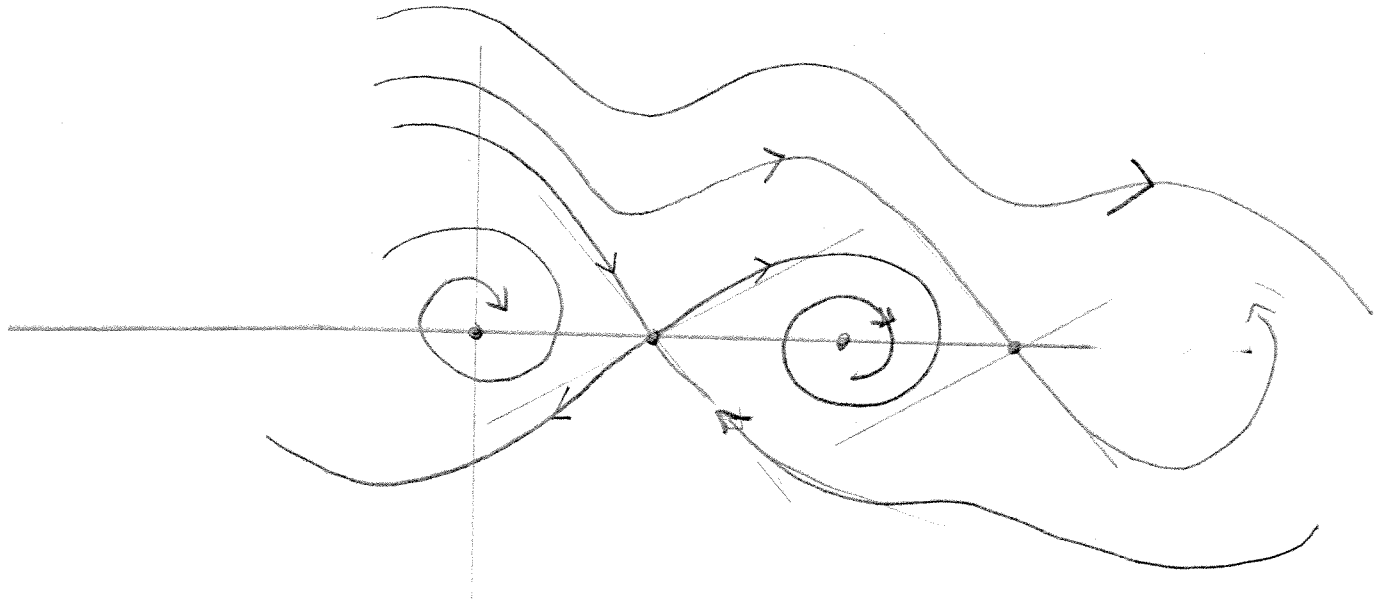
$$(=) \quad \lambda = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + k} = \lambda_{\pm}$$

Tässä $\lambda_- < 0 < \lambda_+$, eli leypää on ainas sattulapiste.

Vaimennus $\gamma = \sqrt{2k}$ kutsutaan kriittiseksi
vaimennukseksi, $\gamma < \sqrt{2k}$ ali kriittiseksi,
 $\gamma > \sqrt{2k}$ yli kriittiseksi.

Facilemas:

Ali Kuntli no



Lashitan omnis vektorit:

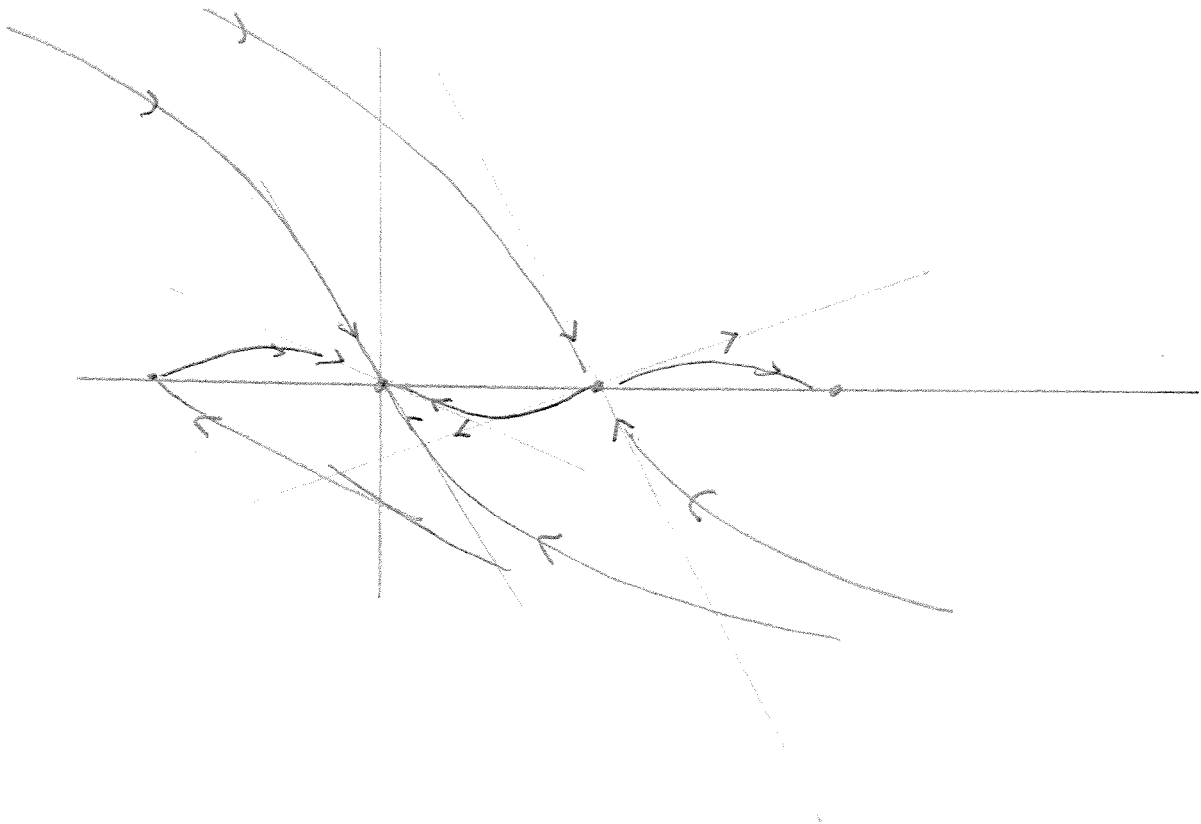
u pariton (Natalapitu): $\lambda = \lambda_{\pm}$

$$A u = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = \lambda u_1 \\ k u_1 - \gamma u_2 = \lambda u_2 \end{cases}$$

$$\text{ch } u_{\pm} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_{\pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{2} + k} \end{bmatrix}$$

u paritui (nihil): Kute cellu,

$$u_{\pm} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_{\pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{2} - k} \end{bmatrix}$$



Fasikunst isoliinit

Taaskordne teema edellises viimastena

$$\begin{cases} x_1' = x_1 x_2 - 1 = f_1(x) \\ x_2' = x_1^2 - x_2 = f_2(x) \end{cases}$$

Kiirtepunktidele $(x_1, x_2) = (1, 1)$. Tuletatavaid seadmeid:

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ 2x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = Df(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Omnivariatsioon:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(1 - \lambda)(1 + \lambda) - 2 = \lambda^2 - 1 - 2 = \lambda^2 - 3 \quad \text{ehi}$$

$$\lambda = \pm \sqrt{3}$$

Kysymys on siis sekulaarista. Osmiaisvehkeit :

$$A\sigma = \pm \sqrt{3} \sigma \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = \pm \sqrt{3} \sigma_1 \\ 2\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sqrt{3} \sigma_2 \end{cases}$$

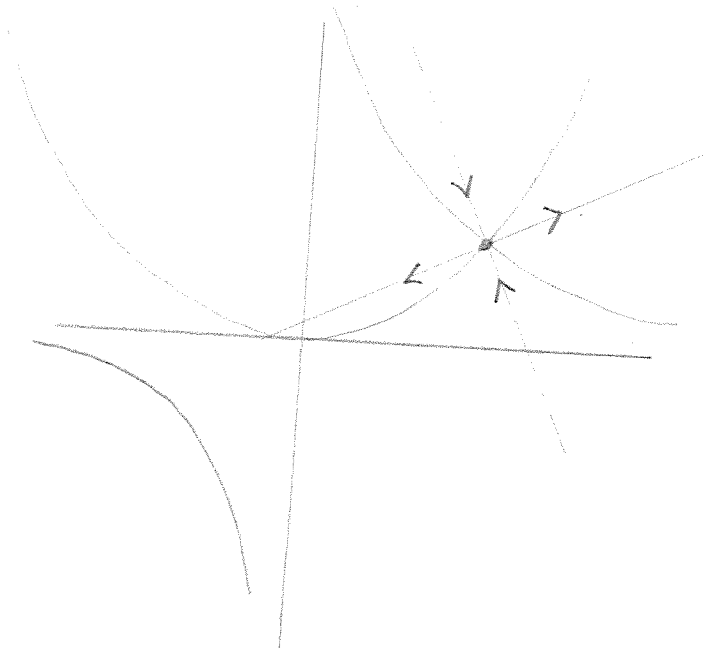
Yhtälöt ovat yhtäpitäiset (tarkista!), ja toinen -
kurat, kun

$$\sigma_2 = -(1 \mp \sqrt{3}) \sigma_1,$$

eli Osmiaisvehkeit voidaan valita

$$\sigma_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} - 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_- = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} - 1 \end{bmatrix}$$



Facsimiles hahmottelemme todellakin muuttavat asiat:

- Kun $x_1 x_2 - 1 = 0$ eli $x_2 = \frac{1}{x_1}$, $x_1 \neq 0$, niin $x_1' = 0$. Sitten radan $t \mapsto (x_1(t), x_2(t)) = \gamma(t)$ tangenttivektori $\frac{d\gamma}{dt} = (x_1'(t), x_2'(t))$ on pystysuora.

- Kun $x_1^2 - x_2 = 0$ eli $x_2 = x_1^2$, on $x_2' = 0$, ja tangenttivektori on vaakasuora.

Yleisemmin, määritellään isokliini

$$K(k) = \{ (x_1, x_2) \mid x_2' = k x_1' \}, k \in \mathbb{R}.$$

Isokliini on siis joukko (tyypillisesti käyrä), jonka jostain radan $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ tangentilla on annettu kulmakerto k .

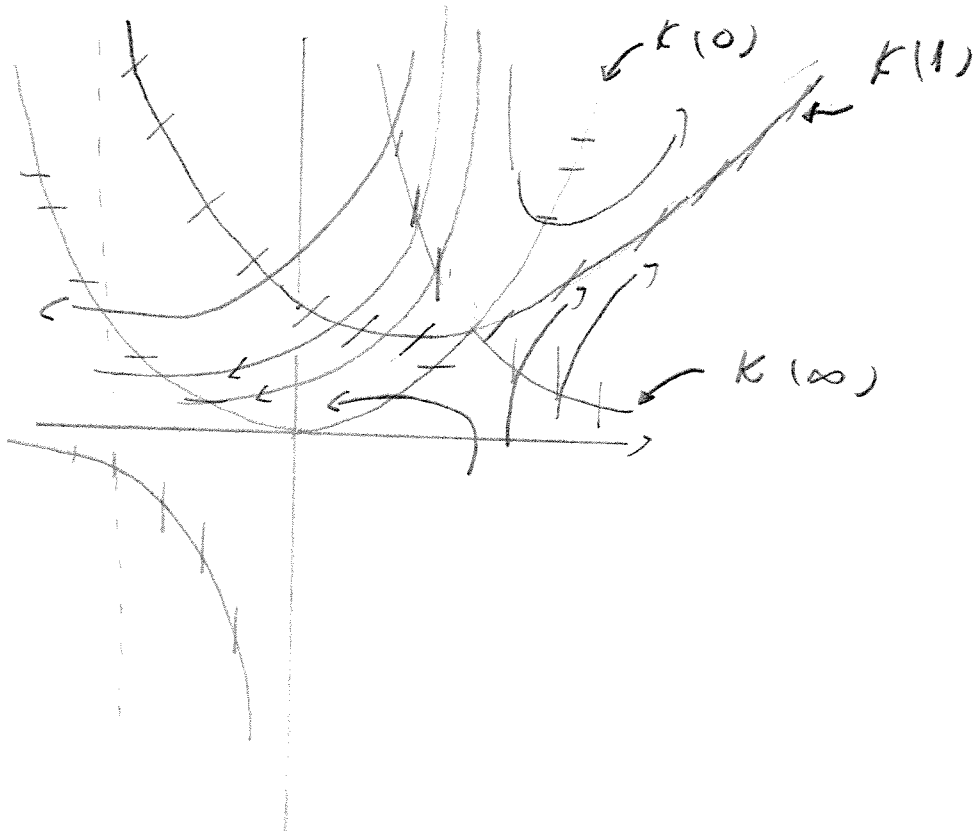
Eristämme ominuhtitehtävään isokliinit:

$$x_1^2 - x_2 = k (x_1 x_2 - 1)$$

$$\Rightarrow (k x_1 + 1) x_2 = x_1^2 + k$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{x_1^2 + k}{k x_1 + 1}$$

Hahmotelkane joitaku isseläinejä ja niiden avulla
 forituna:



$$k=1: \quad x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{x_1 + 1}$$

Korkeamman kertaluvun tavalliset diff. yhtälöt

Ensimmäisen kertaluvun systeemit $x' = f(x)$

on kyödyllistä määrittää korkeamman kertaluvun tavalliset diff. yhtälöt voidaan aina muuttaa tähän muotoon.

Esimerkki: $y'' - 2y'y + y^3 = 0$, $y = y(t)$;

Määritellään $x_1 = y$; $x_2 = y'$. Nyt

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = y'' = 2y'y - y^3 = 2x_2x_1 - x_1^3 \end{cases}$$

eli

$$x' = f(x)$$

$$f_1(x) = x_2, \quad f_2(x) = 2x_2x_1 - x_1^3.$$

Esimerkki: $(1+y)y''' - (y')^2y^3 = 0$

Määritellään $x_1 = y$; $x_2 = y'$; $x_3 = y''$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = y''' = \frac{(y')^2y^3}{1+y} = \frac{x_2^2x_1^3}{1+x_1} \end{cases}$$

Esimerkki

on den Polin yhtälö

$$y'' - \mu(1-y^2)y' + y = 0 \quad , \quad y = y(t).$$

Määritellään

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases}$$

jolloin

$$\begin{cases} x_1' = y' = x_2 \\ x_2' = y'' = \mu(1-y^2)y' - y \\ \quad = \mu(1-x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases}$$

Radikaalifunktioiden on $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$.

Kysytään, voidaan radikaalit esittää muodossa $x_2 = x_2(x_1)$

Ketjusäännöllä

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_2}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} \quad , \quad \text{joten}$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{\mu(1-x_1^2)x_2 - x_1}{x_2} = \mu(1-x_1^2) - \frac{x_1}{x_2}$$

Tasolinjat ovat käyriä joilla $\frac{dx_2}{dx_1} = k = \text{vakio}$,
eli

$$\mu(1-x_1^2) - \frac{x_1}{x_2} = k$$

Tämä saadaan ratkaisuksi

$$x_2 = \frac{x_1}{\mu(1-x_1^2) - k}$$

Alla on kuvattu perikuvasta, kun $\mu = 0.1$

