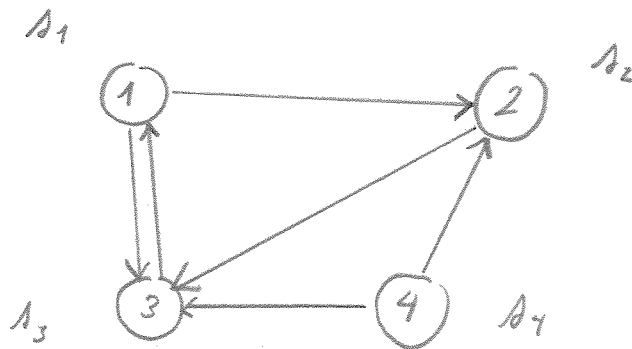


Ominaisuuksien sovelluksia I

Tarkastellaan mielenkiintoista kysymystä: Miten Google järjestää verkkosivut tärkeysjärjestykseen?

Oletetaan, että olemme antaneet hakusanan, ja hakukone on löytänyt jonkun sivun,

$\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. Oletetaan, että on sivustoja, jotka viittaavat toisiin näistä sivustoista. Voimme määritellä suunnatun verkon, jossa sivut ovat soluja ja viittaukset suunnattuja yhdyspiirtejä. Esimerkki:



Kysymykseen "Mitä on tärkein sivu?" annetaan nyt seuraava vastaus: jos käyttäjä siirtyy sivulta sivulle satunnaisesti ja pysähtyy sivulle aina samaksi ajaksi, tärkein sivu on se, jossa hän viettää eniten aikaa.

Siirtymämatrisi A on matriisi, jonka k :s sarakke kertoo, millä todennäköisyydellä solusta s_k siirrytään minkin soluihin. Sarakesumma on altava $= 1$, ja jos ei haluta muuta erittämistä, kaikki i -molelementit ovat yhtä suuria.

E:nä, E-dellisen siirron vaihto:

Solusta s_1 yläne soluihin s_2 ja s_3 ,

nä 1. sarakke on

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{t.n. } s_1 \rightarrow s_2$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{t.n. } s_1 \rightarrow s_3$$

Rakennetaan näin matriisi A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oletetaan, että satunaiskävely aloitetaan vaihtopen solusta s_1 . Alkua näin olemme todennäköisyydellä 1 solussa s_1 . Merkitään x^0 :llä alku todennäköisyys jakannan:

$$x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mikä on A:n jakauma yhden askeleen jälkeen?

A_1 istä voidaan siirtyä todennäköisyydellä $1/2$ solmuun A_2 tai A_3 . Siis

$$x^1 = Ax^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entä kahden askeleen jälkeen? Jos olemme solmuissa A_2 , on pakko tehdä siirto $A_2 \rightarrow A_3$, ja jos taas A_3 :ssä, pakote $A_3 \rightarrow A_1$. Siis

$$x^2 = Ax^1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Näin jatketaan:

$$x^3 = Ax^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Raja kuin suoran jatkos

$$x^k = Ax^{k-1} = \dots = A^k x^0$$

Kun k kasvaa, voidaan ajatella, että jono (x^k) asettuu johonkin tasapainotilaan, ja tämä tila kutsuu, missä kestämättäni ollaan mitäänkin tasapainotilasta. Oletetaan

$$x^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$$

Ottamalla raja-arvo $k \rightarrow \infty$ puolittain yhtä löytyy

$$Ax^k = x^{k+1}$$

Saadaks

$$Ax^\infty = x^\infty$$

Siiis: x^∞ on A in ominaisvektori ominaisarvolla 1 !

Sivut voidaan siten järjestää tärkeysjärjestykseen, josta on x^∞ in alhaisin numerusjärjestys.

Erasmalinstituutissa A ominaisarvot ovat
 1 , $\frac{1}{2}(-1+i)$, $-\frac{1}{2}(1+i)$ ja 0

Ominaisarvon 1 vastaava ominaisvektori on

$$x^\infty = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tuot λ_1 ja λ_3 ovat läheisiä, siten saadaan λ_2 ja logaritmi λ_4 .