

Iteratiivista ratkaisusta

Ongelmaa $Ax=b$ suora ratkaiseminen perustuu yleensä matriisihajotelmien käyttöön (LU, Cholesky etc.)

Iteratiiviset ratkaisijat etrivät jonon

$$x^0 \rightarrow x^1 \rightarrow x^2 \rightarrow \dots$$

joka (toisin sanoen) suppenee joihinkin $Ax^{(k)} \rightarrow b$.

Tässä luvussa käsitellään vain simppelintä yleistä menetelmää, Gauss-Seidel-iteratiivista

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ja oletetaan, että $a_{jj} \neq 0$, $1 \leq j \leq n$. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$Ax = b \in \mathbb{R}^n$$

Tarkastellaan yhtälöryhmää $a_{jj} : \forall j$:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jj}x_j + \dots + a_{jn}x_n = b_j$$

—→

$$\frac{a_{j1}}{a_{jj}}x_1 + \frac{a_{j2}}{a_{jj}}x_2 + \dots + x_j + \dots + \frac{a_{jn}}{a_{jj}}x_n = \frac{b_j}{a_{jj}}$$

Näin saadaan uusi yhtälöryhmä, jossa diagonaalille on yksiköitä. Käyttäen matriisi A ja vektori b muodotun skaalattuna, yhtälö on muotoa

$$(a_{ij} \leftarrow \frac{a_{ij}}{a_{jj}}, \quad b_j \leftarrow \frac{b_j}{a_{jj}})$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + x_n = b_n \end{cases}$$

Gauss-Seidel-iterationin idea: Alkuarvot $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Päivitys x_1 :

$$x_1^{(1)} = b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - \dots - a_{1n}x_n^{(0)}$$

Päivitys x_2 :

$$x_2^{(1)} = b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)} - \dots - a_{2n}x_n^{(0)}$$

$\vdots$

Päivitys x_n :

$$x_n^{(1)} = b_n - a_{n1}x_1^{(1)} - a_{n2}x_2^{(1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(2)}$$

Näin on kehitetty yhden päivittyskierroksen, $x^{(0)} \rightarrow x^{(1)}$.
Samoin toistetaan, $x^{(1)} \rightarrow x^{(2)}$, jne., kunnes jokin
suppenevuuskriteeri täyttyy.

Esimerkki: Lasketaan pari kerrantoa:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Valitaan $x^{(0)} = [0; 0, 0]$;

1. Kierros:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1 \\ x_2^{(1)} = x_1^{(1)} + x_3^{(1)} = 1 \\ x_3^{(1)} = 2 - 3x_2^{(1)} = -1 \end{cases}$$

2. Kierros:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1 + 2x_2^{(1)} = 3 \\ x_2^{(2)} = x_1^{(2)} + x_3^{(1)} = 3 - 1 = 2 \\ x_3^{(2)} = 2 - 3x_2^{(1)} = 2 - 6 = -4 \end{cases}$$

Voidaan myös käyttää suoraan Gauss-Seidel -iteratiivista menetelmää.
Tutkitaan ensin: kysytään

$$A = I + L + U$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & \\ x & & \\ x & x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Gauss-Seidel-iteratiivimatriisilaskennan voidaan kirjoittaa seuraavasti

$$I x^{(j+1)} = b - L x^{(j+1)} - U x^{(j)} \quad (*)$$

eli

$$\begin{array}{lcl} x_1^{(j+1)} = & b_1 & \text{VANHA AKSIO} \\ & & - (a_{12} x_2^{(j)} + a_{13} x_3^{(j)} + \dots + a_{1n} x_n^{(j)}) \\ x_2^{(j+1)} = & b_2 - a_{21} x_1^{(j+1)} & \\ \vdots & & \\ x_n^{(j+1)} = & b_n - (a_{n1} x_1^{(j+1)} + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1}^{(j+1)}) & \text{UUSI AKSIO} \end{array}$$

Yhteisesti (*) on siis muotoa

$$(I + L) x^{(j+1)} = b - U x^{(j)}$$

Matriisi $I + L$ on alakehämatriisi, jonka diagonaalielementit ovat yhtäsuuria. Se on kääntyvä, eli on olemassa kääntämismatriisi $(I + L)^{-1}$. Nyt

$$x^{(j+1)} = \underbrace{(I + L)^{-1} b}_R - \underbrace{(I + L)^{-1} U}_{=C} x^{(j)}$$

Toinen saadaan,

$$\begin{aligned} x^{(j+1)} &= R + C x^{(j)} \\ &= R + C(R + C x^{(j-1)}) \\ &= \dots \\ &= R + CR + C^2 R + \dots + C^j R + C^{j+1} x^{(0)} \\ &= \sum_{k=1}^j C^k R + C^{j+1} x^{(0)} \end{aligned}$$

Käytetään edellä itä aiemmin saatuun suhteeseen, että $\|C\| < 1$. Tällöin nimittäin

$$\|C^k R\| \leq \|C\| \|C^{k-1} R\| \leq \dots \leq \|C\|^k \|R\|$$

joten saadaan seuraava

$$\sum_{k=1}^{\infty} C^k R$$

suppenee itseisesti, ja $\|C^{j+1} x^{(0)}\| \rightarrow 0$.

Selvästi suppenemisen toteuttamiseksi matriisin A tarkastelu ei ole helppoa, mutta onneksi voidaan laskea matriisin $(I+A)^{-1}$. Oletetaan, että A on reaalidiagonaalimatriisi, sen ominuudet konvergenssi ovat hyvät.