# Ominaisarvoista

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Luku $\lambda \in \mathbb{R}$ on matriisin reaalinen ominaisarvo, jos on olemassa $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$, s.e.,

$$A v = \lambda v.$$

Vektori $v$ on vastaava ominaisvektori.

Huom: Jos $v \neq 0$ on ominaisvektori, niin mikä tahansa muotoa $\alpha v$, $\alpha \neq 0$, on myös ominaisvektori. Usein ominaisvektorit valitaan siten, että $\|v\| = 1$.

Ominaisarvon laskeminen: Oletetaan, että $\lambda$ on ominaisvektori, eli

$$(A - \lambda I) v = 0, \quad v \neq 0, \qquad (*)$$

missä $I = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Jos $(A - \lambda I)$ olisi kääntyvä matriisi, niin yhtälöstä $(*)$ seuraisi $v = 0$. Siis $\lambda$:n tulee toteuttaa ehto

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

$P_A(\lambda)$ on $n$:nnen asteen polynomi, ns. $A$:n karakteristinen polynomi, ja $\lambda$ on siis sen nollakohta.

Esim:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 3\lambda - 7$$

$$p_A(\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 7} = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Koska yleisellä polynomilla $p_\lambda$ ei tarvitse olla yhtään reaalista juurta, niin ominaisarvon käsite laajennetaan koskemaan kompleksisia ominaisarvoja.

Esim:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i);$$

Ominaisarvot $\lambda = i$ ja $\lambda = -i$.

Samoin, kun ominaisarvo on kompleksinen, ei voida toivoa löytyvän reaalista ominaisvektoria, vaan ominaisvektori voi myös olla kompleksinen.

Esim: Edellisestä esimerkistä etsitään ominaisvektorit:

$\lambda = i$: $\quad Av = iv \iff \begin{cases} v_2 = i v_1 \\ -v_1 = i v_2 \Rightarrow v_2 = -\frac{1}{i} v_1 = i v_1 \end{cases}$

$\iff v_2 = i v_1$. Valitaan esim.

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix};$$

$\lambda = -i$: $\quad Au = -iu \iff \begin{cases} u_2 = -i u_1 \\ -u_1 = -i u_2 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{i} u_1 = -i u_1 \end{cases}$

$\iff u_2 = -i u_1$. Valitaan esim.

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

On olemassa joukko matriiseja, joiden ominaisarvot ovat aina reaaliset. Tarvitsemme joitain käsitteitä.

Kompleksisen vektorin $v \in \mathbb{C}^n$ normi määritellään

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |v_j|^2}, \quad |v_j| = v_j \in \mathbb{C}\text{:n moduli}$$

Hermiittinen transpoosi eli adjungaatti:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad A^{+} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \dots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & & \vdots \\ \vdots & & \\ \overline{a_{1n}} & & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times m}$$

Kompleksisen vektorin normille pätee ($z\bar{z} = |z|^2, z \in \mathbb{C}$)

$$\|v\|^2 = v^+ v = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |v_j|^2$$

Matriisi $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ on <u>hermiittinen</u> eli <u>itseadjungoitu</u>, jos

$$A^+ = A.$$

Erityisesti reaalinen symmetrinen matriisi on hermiittinen.

Pätee

$$(Av)^+ = v^+ A^+$$

Jos $u, v \in \mathbb{C}^n$, niin vektoreiden <u>kompleksinen sisä-tulo</u> on

$$u^+ v = \sum_{j=1}^{n} \bar{u}_j v_j$$

Huomaa:

$$\overline{u^+ v} = \sum_{j=1}^{n} \overline{\bar{u}_j v_j} = \sum_{j=1}^{n} u_j \bar{v}_j = v^+ u$$

Siis kompleksinen sisätulo on vaihdannainen vain, jos sen arvo on reaalinen.

Näytetään, että itseadjungoidun matriisin ominais-arvot ovat reaalisia: Olkoon $A^+=A$, ja

$$Av = \lambda v \quad , v \neq 0, \ v \in \mathbb{C}^n.$$

Tällöin

$$\lambda \|v\|^2 = v^+(\lambda v) = v^+Av$$

Kompleksikonjugoimalla,

$$\bar{\lambda}\|v\|^2 = \overline{v^+(Av)} = (Av)^+v$$

$$= v^+\underbrace{A^+}_{=A}v = v^+Av = \lambda\|v\|^2,$$

eli $\bar{\lambda} = \lambda$, mikä merkitsee, että $\lambda \in \mathbb{R}$.

Osoitetaan, että jos $\lambda$ ja $\mu$ ovat kaksi itseadjungoidun matriisin erisuurta ominaisarvoa, ja

$$Av = \lambda v \quad , v \neq 0$$

$$Au = \mu u \quad , u \neq 0,$$

niin vektorit $u$ ja $v$ ovat keskenään kohtisuoria, toisin sanoen,

$$u^+v = 0.$$

Tämä nähdään seuraavasti:

$$\lambda u^+v = u^+(\lambda v) = u^+(Av)$$

$$= u^+Av = u^+A^+v$$

$$= (Au)^+ v = \underbrace{(\mu u)}_{\in \mathbb{R}}{}^+ v = \mu u^+ v,$$

jolloin

$$\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} u^+ v = 0,$$

ja siis välttämättä $u^+ v = 0$.

Lasketaan tässä välissä esimerkki:

<u>Esim</u>: Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$;

$A$ on symmetrinen, joten sen ominaisarvot ovat reaaliset:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \lambda = \pm 3 \quad \text{eli} \quad \lambda = 1 \mp 3 \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$$

Koska ominaisarvot ovat <u>erisuuret</u>, vastaavat ominais-vektorit ovat kohtisuorassa

<u>$\lambda = -2$:</u> $\quad Av = \lambda v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 - 3v_2 = -2v_1 \\ -3v_1 + v_2 = -2v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 3v_1 - 3v_2 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad v_2 = v_1$ ; Valitaan $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda = 4}$:

$$Au = \lambda u \iff \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} u_1 - 3u_2 = 4u_1 \\ -3u_1 + u_2 = 4u_2 \end{cases} \iff 3u_1 + 3u_2 = 0$$

$\iff u_1 = -u_2$; Valitaan $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$;

Nyt

$$v^+ u = v^T u = \frac{1}{2} [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0,$$

kuten piti olla.

Jos muodostamme vektoreista $u$ ja $v$ matriisin

$$U = [v \; u] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

niin $U$ on <u>ortogonaalimatriisi</u>, ts. sen <u>sarakkeet ovat yksikön mittaisia keskenään kohtisuorassa olevia vektoreita</u>. Pätee:

$$U^T U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I, \quad \text{eli}$$

$$\boxed{U^T = U^{-1}}$$ (Ortogonaalisen matriisin määr.)

Yleisesti: Olkoot $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$, ja

$$u_j^T u_j = \|u_j\|^2 = 1 \quad , \quad 1 \le j \le n$$

$$u_j^T u_k = 0 \quad , \text{ kun } j \ne k,$$

eli lyhyesti,

$$u_j u_k = \delta_{jk} .$$

Määritellään matriisi $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ siten, että sen $j$:s sarake on $u_j$,

$$U = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$$

Tällöin

$$U^T U = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} [u_1, u_2, \ldots \quad u_n]$$

$$= \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & u_1^T u_2 & \ldots & u_1^T u_n \\ u_2^T u_1 & u_2^T u_2 & \ldots & u_2^T u_n \\ \vdots & & & \\ u_n^T u_1 & u_n^T u_2 & \ldots & u_n^T u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I ,$$

joten $U$ on ortogonaalimatriisi

Tehdään nyt seuraava havainto: Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrinen matriisi, jonka ominaisarvot ovat erisuuria, $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$. Tällöin ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat keskenään kohtisuorassa, ja niiden normiksi voidaan valita 1,

$$Au_j = \lambda_j u_j \quad , \quad \|u_j\| = 1, \quad 1 \le j \le n$$

Muodostetaan matriisi $U = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$, joka on siis ortogonaalinen,

$$U^T U = U U^T = I$$

Lasketaan matriisitulo $AU$:

$$AU = A\,[u_1, u_2 \ldots u_n] = [Au_1, Au_2, \ldots, Au_n]$$

$$= [\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \ldots, \lambda_n u_n],$$

eli matriisin $U$ sarakkeet on skaalattu vastaavalla ominaisarvolla. On helppo nähdä, että sarakeskaalaus voidaan toteuttaa matriisitulona diagonaalimatriisin kanssa:

$$[\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \ldots, \lambda_n u_n] = [u_1, u_2, \ldots, u_n] \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{= \Lambda} = U\Lambda$$

missä siis

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n).$$

Olemme saaneet tuloksen

$$AU = U\Lambda.$$

Kerrotaan yhtälö vasemmalta $U^T$:llä, ja muistetaan, että $U$ on ortogonaalinen, jolloin siis

$$\boxed{U^T A U = \Lambda}$$

Sanotaan, että ortogonaalimatriisi $U$ diagonalisoi matriisin $A$.

Edellä oletettiin, että

(1) $A$ on symmetrinen

(2) $A$:n ominaisarvot ovat erisuuret

Voidaan kysyä, löydetäänkö aina ortogonaalinen $U$, joka diagonalisoisi annetun matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Vastaus on ei.

Pätee kuitenkin: Jokainen symmetrinen matriisi voidaan diagonalisoida ortogonaalimatriisilla. Tutkitaan asiaa jatkossa lähemmin.