

Metriinimitt

Vektoriin $x \in \mathbb{R}^n$ Euklidoksen normi on

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

Mitä mahdollisia normia:

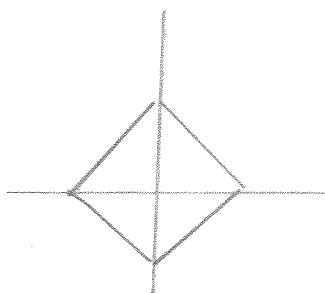
$$l_1\text{-normi: } \|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

$$l_\infty\text{-normi: } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

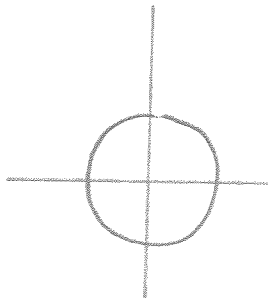
$$l_p\text{-normi: } \|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad p > 1.$$

Mitä l_p -pallot näyttävät? Pienellä tasoon

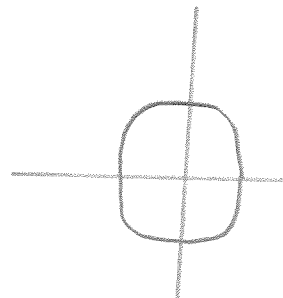
l_p -pallon piste, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\|x\|_p = 1$:



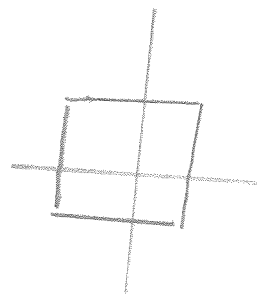
$p=1$



$p=2$



$p > 2$



$p = \infty$

Entä matriisien?

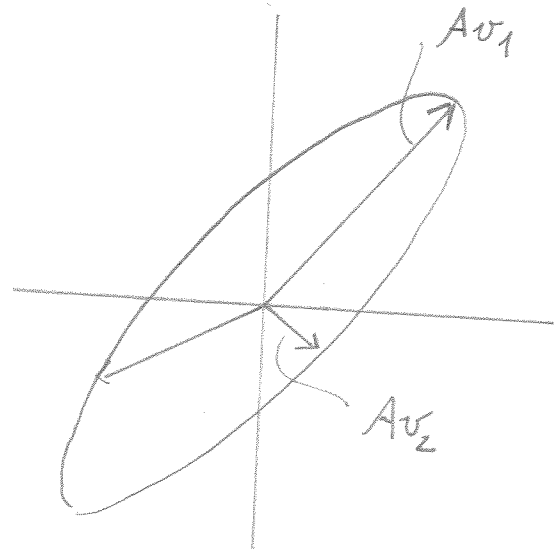
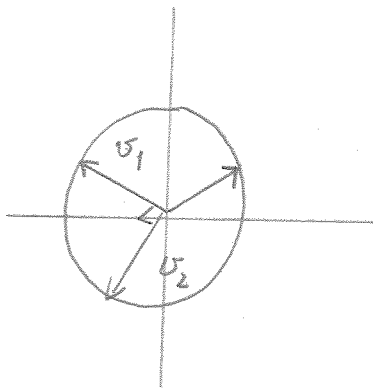
Eri mahdollisten matriisien kesken on

ms. Frobenius-normi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Tämä normi ei kuitenkaan anna ole käyttökelpoista. Parempi mitta matriisin koolle on, miten se kääntää yksikkövektoreita:



ℓ^2 -pallot

Nyt. tiedetään, että jokin matriisi kääntää pallon ellipsoidiksi. Matriisin koon voidaan määrittää vektoreiden venytys, josta se on tehtä:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Huom: Matriisin normi riippuu siitä, mitä normia vektoreille halutaan käyttää. Voidaan siis määritellä

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Osoittautuu:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (\text{sarakesummanormi})$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{rivisummanormi})$$

Matriisille $\|A\|_2$ ei ole yksinkertaista kaavaa

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, ja olkoon $\|\cdot\|$ mikä tahansa vektorinormi. Nyt pätee

$$\|Ax\| = \|x\| \underbrace{\left\| A \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\|}_{\|x\|=1} \leq \|x\| \max_{\|u\|=1} \|Au\| = \|A\| \|x\|$$

Samaan, jos $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$, niin

$$\|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|, \quad \text{joten}$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Iteratiivista ratkaisusta

Ongelmaa $Ax=b$ uusi ratkaisun perustana
 yleensä matriisi hajotelmien käyttöön (LU, Cholesky etc.)

Iteratiiviset ratkaisijat etrivät jonon

$$x^0 \rightarrow x^1 \rightarrow x^2 \rightarrow \dots$$

joka (tämä muuttuu) suppenee joihinkin $Ax^{(k)} \rightarrow b$.

Täällä kussakin askeleessa vain muutama yhtälö on
 muuttunut, Gauss-Seidel-iteratiolla

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ja oletetaan, että $a_{jj} \neq 0$,
 $1 \leq j \leq n$. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$Ax = b \in \mathbb{R}^n$$

Tuetaan kunkin yhtälöryhmän a_{jj} :n:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jj}x_j + \dots + a_{jn}x_n = b_j$$

—→

$$\frac{a_{j1}}{a_{jj}}x_1 + \frac{a_{j2}}{a_{jj}}x_2 + \dots + x_j + \dots + \frac{a_{jn}}{a_{jj}}x_n = \frac{b_j}{a_{jj}}$$

Näin saadaan uusi yhtälöryhmä, jossa diagonaalielementit
 on yksiköitä. Käytännössä matriisi A ja vektori b
 muuttuvat skaalatuiksi, yhtälöt on siis muuttanut

$$(a_{ij} \leftarrow \frac{a_{ij}}{a_{jj}}, \quad b_j \leftarrow \frac{b_j}{a_{jj}})$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + x_n = b_n \end{cases}$$

Gauss-Seidel-iterationin idea: Alkuarvot $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Päivitys x_1 :

$$x_1^{(1)} = b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - \dots - a_{1n}x_n^{(0)}$$

Päivitys x_2 :

$$x_2^{(1)} = b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)} - \dots - a_{2n}x_n^{(0)}$$

$\vdots$

Päivitys x_n

$$x_n^{(1)} = b_n - a_{n1}x_1^{(1)} - a_{n2}x_2^{(1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(2)}$$

Näin on kehitetty yhtiä päivityskierrosta, $x^{(0)} \rightarrow x^{(1)}$.

Samaa toistetaan, $x^{(1)} \rightarrow x^{(2)}$, jne., kunnes jokin

suppeneumiskriteeri täyttyy.

Esimerkki: Laskeetaan pari kerrasta:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Valitaan $x^{(0)} = [0; 0; 0]$;

1. Kierros:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1 \\ x_2^{(1)} = x_1^{(1)} + x_3^{(1)} = 1 \\ x_3^{(1)} = 2 - 3x_2^{(1)} = -1 \end{cases}$$

2. Kierros:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1 + 2x_2^{(1)} = 3 \\ x_2^{(2)} = x_1^{(2)} + x_3^{(1)} = 3 - 1 = 2 \\ x_3^{(2)} = 2 - 3x_2^{(1)} = 2 - 6 = -4 \end{cases}$$

Voidaan myös käyttää suoraan Gauss-Jordan -menetelmää.
Tutkitaan ensin: kysytään

$$A = I + L + U$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & \\ x & & \\ x & x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Gauss-Seidel-iterointi matriisimallissa voidaan kirjoittaa muodossa

$$I x^{(j+1)} = b - L x^{(j+1)} - U x^{(j)} \quad (*)$$

eli

$$\begin{array}{lcl} x_1^{(j+1)} & = & b_1 \quad \begin{array}{l} \text{VANHA AKSIO} \\ \downarrow \end{array} \\ & & - (a_{12} x_2^{(j)} + a_{13} x_3^{(j)} + \dots + a_{1n} x_n^{(j)}) \\ x_2^{(j+1)} & = & b_2 - a_{21} x_1^{(j+1)} \quad \begin{array}{l} \text{VANHA AKSIO} \\ \downarrow \end{array} \\ & & - (a_{23} x_3^{(j)} + \dots + a_{2n} x_n^{(j)}) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(j+1)} & = & b_n - (a_{n1} x_1^{(j+1)} + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1}^{(j+1)}) \quad \begin{array}{l} \text{UUSI AKSIO} \\ \uparrow \end{array} \end{array}$$

Yhteisesti (*) on siis muotoa

$$(I + L) x^{(j+1)} = b - U x^{(j)}$$

Matriisi $I + L$ on alakolmiomatriisi, jonka diagonaalielementit ovat yhtäsuuret. Siis se on kääntyvä, eli on olemassa kääntämismatriisi $(I + L)^{-1}$. Nyt

$$x^{(j+1)} = \underbrace{(I + L)^{-1} b}_r - \underbrace{(I + L)^{-1} U x^{(j)}}_{= C}$$

Toinen sarja,

$$\begin{aligned} x^{(j+1)} &= \mu + C x^{(j)} \\ &= \mu + C(\mu + C x^{(j-1)}) \\ &= \dots \\ &= \mu + C\mu + C^2\mu + \dots + C^j\mu + C^{j+1}x^{(0)} \\ &= \sum_{k=1}^j C^k\mu + C^{j+1}x^{(0)} \end{aligned}$$

Käyttävä yhtä, että sarja suppenee, että $\|C\| < 1$. Tällöin nimittäin

$$\|C^k\mu\| \leq \|C\| \|C^{k-1}\mu\| \leq \dots \leq \|C\|^k \|\mu\|$$

joten sarja suppenee

$$\sum_{k=1}^{\infty} C^k\mu$$

suppenee itsestään, ja $\|C^{j+1}x^{(0)}\| \rightarrow 0$.

Sarjan suppenemisen toteuttamiseksi matriisi A tarkemmin ei ole helppo, mutta sen on oltava käänteismatriisi $(I+L)^{-1}$. Yleensä oletetaan, että A on reaalidiagonaalimatriisi, jolloin sarjat konvergoivat nopeasti.