

Cholesky - hajotelma

Matriisin transpoosi määritellään quadrattin, jden nollasta
matriisin rint paradiagonaali:

$$A = \left[\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & \end{array} \right]_{m \times n}, \quad A^T = \left[\begin{array}{ccc} \xrightarrow{1} & \xrightarrow{2} & \xrightarrow{n} \\ & & \\ & & \\ & & \\ \xrightarrow{m} & & \end{array} \right]_n$$

eli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Neliömatrisi on symmetrinen, jos

$$A^T = A.$$

Esimerkki:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} = A^T$$

Olleessa $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisen matriisin. A on
positiivisesti definitti, jos pätee

$$v^T A v > 0 \quad \text{kaikilla } v \in \mathbb{R}^n, \quad v \neq 0.$$

Huom: $v^T A v$ on todella skalaari:

$$b = Av = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} v_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \text{ja}$$

$$\begin{aligned} v^T A v &= v^T b = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^n v_k b_k = \sum_{j,k=1}^n v_k a_{kj} v_j \end{aligned}$$

Matrisin positiivisyyden toteaminen ei yleensä ole helppoa. Todetaan jostakin ominaisuudesta:

Olkoon $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (i)$. Jos A on pos. def. niin

$$e_i^T A e_i = \sum_{j,k=1}^n \underbrace{(e_i)_k}_{=\delta_{i,k}} a_{kj} \underbrace{(e_i)_j}_{=\delta_{i,j}} = a_{ii} > 0,$$

missä käytettiin matriisin

$$\delta_{i,k} = \begin{cases} 1, & \text{jos } i=k \\ 0 & \text{jos } i \neq k \end{cases} = \text{Kroneckerin delta}$$

Sis: Pos. def. matriisin diagonaalielementit ovat positiivisia. Positiivisyyden ehto on kuitenkin determinantin ja alideterminanttien (aristien pisten lasku hajautuessa).

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrinen ja positiivisidefiniitti. Tällöin sille voidaan määrittää symmetrisen LU-hajotus:

$$A = U^T U,$$

missä U on yläkolumiaattinen (ja siis U^T alakolumiaattinen). Halutaan löytää Cholesky'n hajoituksen.

Todistetaan sijoittamalla arvot:

Esim:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 23 \end{bmatrix}$$

Kirjoitetaan $A = U^T U$ komponenttinautoreina:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & & \\ u_{12} & u_{22} & \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{bmatrix}$$

1. rivi $u_{11}^2 = 4$; Valitaan $u_{11} = 2$

$$\underbrace{u_{11}}_{=2} u_{12} = 2 \Rightarrow u_{12} = 1$$

$$\underbrace{u_{11}}_{=2} u_{13} = 14 \Rightarrow u_{13} = 7$$

2. rivi $\underbrace{u_{12}^2}_{=1} + u_{22}^2 = 17 \Rightarrow u_{22}^2 = 16$. Valitaan $u_{22} = 4$

$$\underbrace{u_{12} u_{13}}_{=7} + \underbrace{u_{22} u_{23}}_{=4} = -5 \Rightarrow u_{23} = \frac{1}{4} (-5 - 7) = -3$$

3. perä

$$\underbrace{u_{13}^2}_{=49} + \underbrace{u_{23}^2}_{=9} + u_{33}^2 = 83 \Rightarrow u_{33}^2 = 83 - 49 - 9 = 25,$$

valitaan $u_{33} = 5$

Pis

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ & 4 & -3 \\ & & 5 \end{bmatrix}$$

Huom: yllensä ei kannata alkaa tutkia, onko annettu matriisi positiividefiniitti: Cholesky'n hajotelmas-algoritmi paljastaa, jos näin ei ole, jossain vaiheessa päädytään yhtälöön $u_{jj}^2 = \lambda < 0$ ja algoritmi keskeytyy.