

Matruunilaskenta

yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

matruunimuotoon

$$Ax = b,$$

missä

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Systemi on yliäärity, jos $m > n$

aliäärity, jos $m < n$

puutteellisesti määrity, jos $m = n$.

Huom: Modullisesti määritelty systeemi voi olla
effektiivisesti alimääritelty:

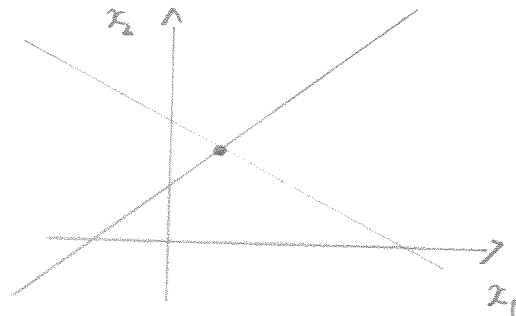
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 1$$

Yhtälöillä $Ax = b$ voi olla yksi, useampi tai
ei yhtäistä ratkaisua.

Esim: Yksi ratkaisu:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

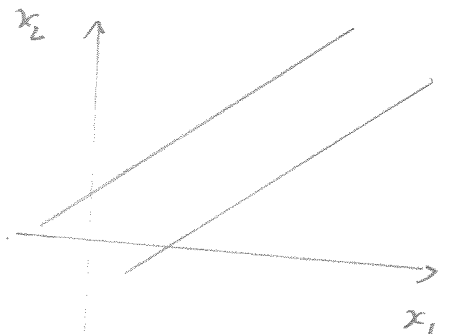
$$x_2 = 4 \Rightarrow x_1 = 1 + x_2 = 5$$



Ei yhtäistä ratkaisua:

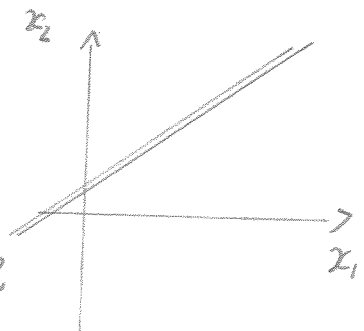
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 - x_2 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$0 = 2, \text{ ristiriita}$$



Äärettömän monta ratkaisua:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 1$$



Käikkiä muotoa $(x_1, x_2) = (1+t, t), t \in \mathbb{R}$
jäsentä lineaarista

Matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on yläkolmionmatriisi, jos

$$A = [a_{ij}] \quad , \quad a_{ij} = 0 \quad , \quad \text{kun } i > j$$

$$A = \begin{bmatrix} x & x & x & \dots & x \\ & x & & & \\ & & x & & \\ & 0 & & \ddots & x \\ & & & & x \end{bmatrix}$$

Vastaavasti määritellään alacolmionmatriisi:

$$A = \begin{bmatrix} x & x & \dots & x \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \\ & & & & x \end{bmatrix}$$

Kolmionmuotoisen määrittämällä yhtälöryhmän ratkaisemiseksi:
talouden rajoitus.

Esimerkki:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ & 4 & 2 \\ & & -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 16 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & (1) \\ 4x_2 + 2x_3 = 16 & (2) \\ -2x_3 = 4 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow x_3 = -2 \quad ; \quad \text{siis } (2) : \text{ kun } x_2 = \frac{1}{4}(16 - 2x_3) = \frac{1}{4}(16 + 4) = 5$$

$$\text{siis } (1) : \text{ kun } x_1 = 2x_2 - x_3 = 10 + 2 = 12.$$

Yleisesti:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}} b_n, \quad a_{nn} \neq 0$$

$$x_j = \frac{1}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{l=j+1}^n a_{jl} x_l \right), \quad a_{jj} \neq 0.$$

Olla siis selvillä, että diagonaalelementit eivät ole nolliä!

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12} \dots a_{1n}} \\ 0 & \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} \overline{a_{22}} & \overline{a_{23} \dots a_{2n}} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \dots = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \neq 0, \text{ jos } a_{jj} \neq 0 \quad \forall j.$$

Matrisiyhtälön $Ax=b$ ratkaisu on saavilla suurel mitta (s.o. ei-iteratiivilla), joskin ideaalisesti saattaa matrisi A ylä- tai alakolonneitron.

$\angle U$ - hajotelma

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Eritään matriisit $\angle, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ siten, että

- $\angle$ on diagonaalimatriisi, U on yläkolmion matriisi
- $A = \angle U$

Yhtälö $Ax = b$ voidaan hahmotella seuraavasti:

$$Ax = \angle \underbrace{Ux}_{=y} = b, \text{ eli}$$

$$\angle y = b \Rightarrow y \quad ; \quad Ux = y \Rightarrow x,$$

josta voidaan nähdä, että ratkaisu on yksikäsitteinen.

Tästä nähdään myös:

$$\angle = \begin{bmatrix} x & & & \\ x & x & & \\ x & & x & \\ \vdots & & & \\ x & \dots & & x \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{n(n+1)}{2}}$

$$U = \begin{bmatrix} x & x & \dots & x \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{n(n+1)}{2}}$

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) = n^2 + n$$

mis n kpl nollia A :n komponentteja (n^2)

Suosittuun on helpo saada valittu kukaan haluttu. Kuvitellaan tässä toisen matriisin diagonaali-
elementit yhtiöiksi;

• $l_{11} = l_{22} = \dots = l_{nn} = 1$ (Doolittle'n algoritmi)
tai

• $u_{11} = u_{22} = \dots = u_{nn} = 1$ (Croutin algoritmi)

Haydenin laskeminen:

Esimerkki:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Doolittle'n matriisit:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

1. perä:

$$u_{11} = 3 ; u_{12} = 5 ; u_{13} = 2$$

2. perä:

$$l_{21} u_{11} = 0 \Rightarrow l_{21} = 0$$

$$\underbrace{l_{21} u_{12}}_{=0} + u_{22} = 8 \Rightarrow u_{22} = 8$$

$$\underbrace{l_{21} u_{13}}_{=0} + u_{23} = 2 \Rightarrow u_{23} = 2$$

3. puvi!

$$l_{31} \underbrace{u_{11}}_{=3} = 6 \Rightarrow l_{31} = 2$$

$$\underbrace{l_{31}}_{=2} \underbrace{u_{12}}_{=5} + \underbrace{l_{32}}_{=8} \underbrace{u_{22}}_{=8} = 2 \Rightarrow l_{32} = \frac{1}{8}(2 - 10) = -1$$

$$\underbrace{l_{31}}_{=2} \underbrace{u_{13}}_{=2} + \underbrace{l_{32}}_{=-1} \underbrace{u_{23}}_{=2} + u_{33} = 8 \Rightarrow u_{33} = 8 - 4 + 2 = 6$$

Sis

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 2 & 8 \\ 6 & 2 & 8 & 8 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 1 \\ 0 & 1 & & \\ 2 & -1 & 1 & \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 3 \\ & 8 & 2 & 8 \\ & & 6 & 6 \end{array} \right]$$

nyt vain algoritmi on tämän perusteella helppo kirjoittaa,