

7. Muuttujien separointimenetelmä

Fourier-sarjojen nimismä sovelluksena tarkastellaan eräiden osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemista ns. muuttujien separointimenetelmän avulla.

Pennstyyppit:

(i) Laplace: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u = u(x, y)$
"elliptinen"

(ii) Lämpöyhtälö: $u = u(x, t)$, $u_t = c^2 u_{xx}$ (1-dim)

$u = u(x, y, t)$, $u_t = c^2 \Delta u$ (2-dim.)

erityisesti: stationaarinen lämpötilajakauma

$\Rightarrow u_t \equiv 0 \Rightarrow \Delta u = 0$ "parabolinen"

(iii) Aaltoyhtälö: $u = u(x, t)$ = aallon amplitudi

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$ (1-ul.)

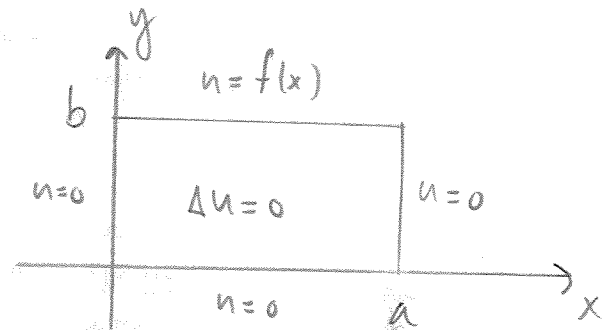
$u = u(x, y, t)$: $u_{tt} = c^2 \Delta u$ (2-ul.)

"hyperbolinen"

Erityyppisten yhtälöiden ratkaisemilla on omat erityisyyksiinsä.

(i) Laplace-yhtälön monakanterion

$$R = \text{monakanteri} \quad 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b$$



Reunaehdöt:

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ u(0, y) = 0 \\ u(b, y) = 0 \\ u(x, b) = f(x) \end{cases}$$

Huom: Yleinen tapaus saadaan torki yhtälön lineaarisuuden vuoksi!

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{monakanterion } R.$$

Muuttujien separointi: etsitään ratkaisua muodossa

$$u(x, y) = F(x) G(y); \text{ sij. yhtälöön}$$

$$F''(x) G(y) + F(x) G''(y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{F''(x)}{F(x)} = - \frac{G''(y)}{G(y)}$$

Voi toteutua vain selläin, kun mol. produkt = vakio $\equiv -k$.

$$\Rightarrow \begin{cases} F'' + k F = 0 \\ G'' - k G = 0 \end{cases}$$

Rennschicht:
$$\begin{cases} u(0, y) = F(0) G(y) = 0 \Rightarrow F(0) = 0 \\ u(a, y) = F(a) G(y) = 0 \Rightarrow F(a) = 0 \end{cases}$$

Ein Laplace: $\underline{k < 0} \Rightarrow F(x) = A e^{\sqrt{-k} x} + B e^{-\sqrt{-k} x}$
 Rennschicht $\Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow$ ei mieden können

$k = 0: F(x) = A + Bx$; Rennschicht $\Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow$ -II-

$\Rightarrow k > 0: F(x) = A \cos(\sqrt{k} x) + B \sin(\sqrt{k} x)$

$F(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow F(x) = B \sin(\sqrt{k} x)$

$F(a) = 0 \Rightarrow B \sin(\sqrt{k} a) = 0$ ($B = 0 \Rightarrow F \equiv 0 \Rightarrow$ ei hing)

$\Rightarrow \sqrt{k} a = m\pi \Rightarrow k = \frac{m^2 \pi^2}{a^2}, m = 1, 2, 3, \dots$

(neg. m antwort kommt funktion)

$\Rightarrow F(x) = B \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$

$\Rightarrow G(y) = C e^{+m\pi y/a} + D e^{-m\pi y/a}$

$G(0) = 0 \Rightarrow C = -D \Rightarrow G(y) = 2C \sinh(m\pi y/a)$

Machen ein m annehmen von m setzen ein B ist j. ein C ist j.

gleichsetzen:

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m^* \sinh(m\pi y/a) \sin(m\pi x/a), \text{ j. m. m. m. m.}$$

Reunnehton $u(x, b) = f(x)$ ei ole vielä käytetty:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \sinh(n\pi b/a) \sin(n\pi x/a) = f(x) ? \quad (0 \leq x \leq a)$$

Totenutun, jos $B_n^* \sinh(n\pi b/a) = b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin(n\pi x/a) dx$
 $=$ funktio $f(x)$ sin-sarjan Fourier-kertoimen!

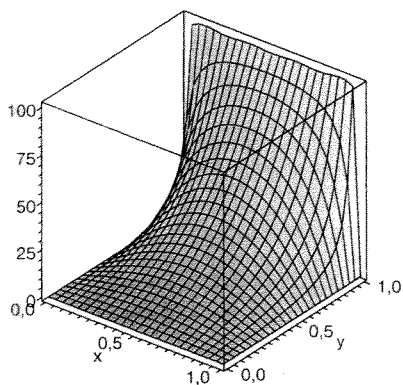
$$\Rightarrow B_n^* = \frac{2}{a \sinh(n\pi b/a)} \int_0^a f(x) \sin(n\pi x/a) dx.$$

Pätee: Sarja suppenee kohti ratkaisua, jos esim. $f \in C^2$.

Esim. $f(x) \equiv \text{vakio} = T, \quad a = b = 1$

$$\Rightarrow B_n^* = \frac{2}{\sinh(n\pi)} \int_0^1 T \cdot \sin(n\pi x) dx$$

$$= \frac{-2T}{n\pi \sinh(n\pi)} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} + \frac{4T}{n\pi \sinh(n\pi)}, & n \text{ pariton} \\ 0, & n \text{ parillinen.} \end{cases}$$



(ii) Lämpö- / diffusioyhtälö

86.

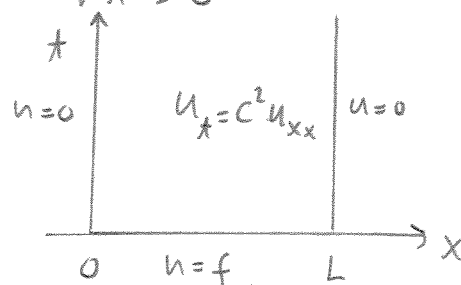
Metallisauhin, pituus L , poikkileikkaus = vakio,
eristetty reuna

$u(x, t)$ = lämpötila pisteessä x hetkellä t

Reunaehtot esim. $u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$

Alueehto: $u(x, 0) = f(x)$

Lämpöyhtälö: $u_t = c^2 u_{xx}$



($c^2 = k/s$, missä k = lämmönjohtavuus,
 s = tiheys
 c = ominaislämpökapasiteetti)

Ratkaisun muuttujien erottelu:

$u(x, t) = F(x)G(t)$; sij. yhtälöön

$$\Rightarrow F(x)G'(t) = c^2 F''(x)G(t)$$

$$\Rightarrow \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{c^2 G(t)} = -k = \text{VAKIO}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F''(x) + kF(x) = 0 \\ G'(t) + kc^2 G(t) = 0 \end{cases}$$

Reunaehtot: $F(0) = F(L) = 0 \Rightarrow k > 0$ ja siten voimme $k = \frac{m^2 \pi^2}{L^2}$,

$F(x) = B \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ kunten Laplace-yhtälön tapauksessa

Sisä $G'(t) + c^2 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} G(t) = 0$, joten

$$G(t) = C \cdot e^{-m^2 \pi^2 c^2 t / L^2}$$

Tulos: funktio $u_m(x, t) = B_m e^{-m^2 \pi^2 c^2 t / L^2} \sin(m\pi x / L)$

totentti $(u_m)_t = c^2 (u_m)_{xx}$ ja $u_m(0, t) = u_m(L, t) \equiv 0$

Alueehtona $u(x, 0) = f(x)$ totenttiarvoiksi muodotetaan

"yleinen" ratkaisu

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\alpha_n t} \sin(n\pi x / L), \quad \alpha_n = \left(\frac{n\pi c}{L} \right)^2 L > 0$$

Alueehtona: $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x / L) = f(x) ?$

Totentti, jos $B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\pi x / L) dx$

= f on $2L$ -jakollisen jatkuvan $\sin$ -kertoimen!

Pätee: Jos f on pal. jatkuvaa, niin sarja suppeutuu ja u tot. osittaisdiff. yhtälön $u_t = c^2 u_{xx}$ ja alue-/reunaehtot.

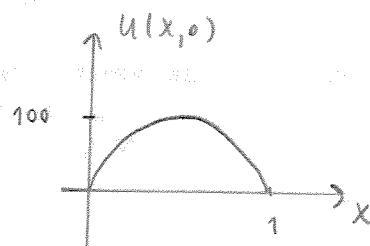
Huom: $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad \forall x$, kuten pitääkin.

(längy riistan ulos samman päistä)

b) Koska $e^{-\alpha_n t} \rightarrow 0$ hyvin nopeasti, niin $u(x,t)$ on C^∞ -funktio $\forall t > 0$, mikä alkuehto olisi epäjatkua. Lämpötila siis "tavoittaa nopeasti" salamamagneetti.

Esim. Esitetty kuparilanka; pituus 1m,

$$f(x) = u(x,0) = 100 \sin(\pi x) \quad (^\circ\text{C})$$



Missä ajassa max-lämpötila laskee 50°C :een,

$$\text{kun } u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall t \geq 0? \quad (\text{SI-yksiköt})$$

Ratk.
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 \pi^2 c^2 t} \sin(n\pi x)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) = 100 \sin(\pi x) ?$$

Totenutus, jos $B_1 = 100$, $B_n = 0 \quad \forall n \geq 2$

(jos alkuehto on F-sarja, niin kehittelemme sen Fourier-sarjaksi)

$$\Rightarrow u(x,t) = 100 e^{-\pi^2 c^2 t} \sin(\pi x)$$

Minimin hetkellä t on siis $100 e^{-\pi^2 c^2 t} = 50$?

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\pi^2 c^2}, \quad c^2 = \frac{k}{\rho c} = 1,1576 \cdot 10^{-4}$$

$$\approx 607 \text{ s} \approx \underline{\underline{10 \text{ min}}}$$

Kupari: $k = 397 \text{ J/m}\cdot\text{K}$

$\rho = 8920 \text{ kg/m}^3$

$c = 385 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$

Huom: Jos olisi $u(x,0) = 100 \sin(3\pi x)$, niin

$$u(x,t) = 100 e^{-9\pi^2 c^2 t} \sin(3\pi x),$$

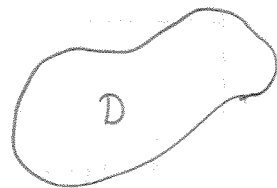
ja jäähdyminen tapahtuisi ajassa

$$\frac{1}{9} \cdot 607 \text{ s} \approx \underline{\underline{67 \text{ s}}} \quad (\text{mieti miksi?})$$

Entä jos reunaehto ei olekaan muotoa $u=0$ reunalla?

Tutkitaan yleistä stationaarista ongelmaa:

$$\begin{cases} u_t = c^2 \Delta u & \text{alueella } D \\ u(\bar{x}, 0) = f(\bar{x}) & \text{alkuehto} \\ u(\bar{x}, t) = g(\bar{x}) & \text{reunalla } \bar{x} \in \partial D, t \geq 0 \end{cases}$$



Jos löydetään tasapainovarkaus $u_0(\bar{x})$, jolle

$$\Delta u_0 = 0, \quad u_0(\bar{x}) = g(\bar{x}) \text{ reunalla } \bar{x} \in \partial D, \text{ niin}$$

funktio $v(\bar{x}, t) = u(\bar{x}, t) - u_0(\bar{x})$ t.t.

$$v_t = u_t = c^2 \Delta u = c^2 \Delta (u - u_0) = c^2 \Delta v,$$

$$v(\bar{x}, 0) = u(\bar{x}, 0) - u_0(\bar{x}) = f(\bar{x}) - u_0(\bar{x}),$$

$$v(\bar{x}, t) = u(\bar{x}, t) - u_0(\bar{x}) = g(\bar{x}) - g(\bar{x}) = 0, \text{ jos } \bar{x} \in \partial D, \forall t \geq 0$$

$\Rightarrow u(\bar{x}, t) = v(\bar{x}, t) + u_0(\bar{x})$. Riittää siis: tasapainovarkaus
+ varkaus nollareunalla 0.

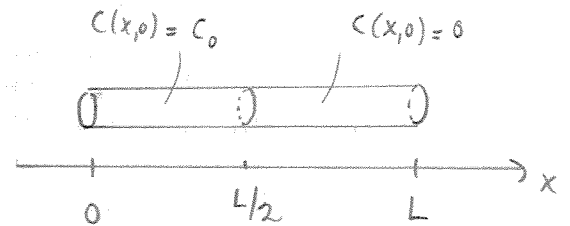
Tarkastellaan saman yhtälön erityyppisellä
neuvohdolla:

Esim. Sylinterimuotoisen säiliön on

kaikki osat, vasemmasta vety-ilma-seosta,

koncentraatio $= C_0$ [mol/m³],

oikealla ilman ($C=0$).



Helikella $t=0$ säiliönä pistetään;

määrä $C = C(x, t)$, kun $t > 0$.

VEEYD KONSENTRAATIO

Ratk.

Diffuusioyhtälö $C_t = D C_{xx}$, $D =$ diffusiokerroin

alkuehto $C(x, 0) = \begin{cases} C_0, & 0 \leq x \leq L/2 \\ 0, & L/2 < x \leq L \end{cases}$ $[D] = \text{m}^2/\text{s}$

Reunehdot: Säiliön päät suljetut $\Rightarrow$ niiden läpi ei

diffundoi $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} C(x, t) \Big|_{x=0} = 0 \quad \forall t \geq 0, \text{ ts.}$
 $x=L$

$C_x(0, t) = C_x(L, t) = 0 \quad \forall t$

Muuttujien erottelu: yllä $C(x, t) = F(x) G(t)$

$\Rightarrow \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{DG(t)} = k = \text{vakio}$

$$\Rightarrow \begin{cases} F''(x) - k F(x) = 0 \\ G'(t) - k D G(t) = 0 \end{cases}$$

Reinnehalt:

$$\begin{cases} C_x(0, t) = 0 \Rightarrow F'(0) = 0 \\ C_x(L, t) = 0 \Rightarrow F'(L) = 0 \end{cases}$$

aimon mahdollisuus (kuten aik.) : $k = -\lambda^2 < 0$

$$\Rightarrow F(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$$

$$F'(x) = -A\lambda \sin(\lambda x) + B\lambda \cos(\lambda x)$$

$$F'(0) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ tai } B = 0 \Rightarrow B \sin(\lambda x) = 0 \text{ MOL. TAP.}$$

$$\Rightarrow F(x) = A \cos(\lambda x)$$

$$F'(L) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ tai } \sin(\lambda L) = 0$$

$$\text{eli } \lambda = \frac{m\pi}{L}, m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow C_m(x, t) = A_m e^{-D m^2 \pi^2 t / L^2} \cos(m\pi x / L) \text{ tot. reunnehdot}$$

ja diffuusioyhtälön

Akkusko voidaan voimassa yleistä muotoa olevalle muuttamilla:

$$C(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m e^{-D m^2 \pi^2 t / L^2} \cos(m\pi x / L)$$

$$C(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(m\pi x / L) \Rightarrow A_m = \text{funktion } C(x, 0) \text{ cos-kehoon!}$$

$$A_0 = \frac{2}{2L} \int_0^L C(x,0) dx = \frac{C_0}{2}$$

$$A_m = \frac{2}{L} \int_0^L C(x,0) \cos(m\pi x/L) dx = \dots = \frac{2C_0}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right), m \geq 1$$

$$\Rightarrow C(x,0) = \frac{C_0}{2} + \frac{2C_0}{\pi} \left(\cos(\pi x/L) - \frac{1}{3} \cos(3\pi x/L) + \frac{1}{5} \cos(5\pi x/L) - \dots \right)$$

$$\Rightarrow C(x,t) = \frac{C_0}{2} + \frac{2C_0}{\pi} \left(e^{-D\pi^2 t/L^2} \cos(\pi x/L) - \frac{1}{3} e^{-9D\pi^2 t/L^2} \cos(3\pi x/L) + \dots \right)$$

Huom: $\lim_{t \rightarrow \infty} C(x,t) = \frac{C_0}{2} \quad (0 < x < L)$

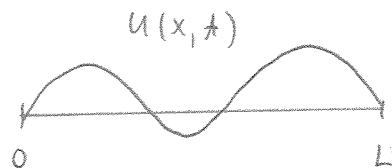
(iii) Aaltoyhtälö

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \text{ yleisesti } u_{tt} = c^2 \Delta u, \text{ missä } u(x,t) \text{ tai } u(\bar{x},t)$$

on aallon amplitudi jostakin $x/\bar{x}$ kethetä t .

Erin. Jännitetty kide: $u(x,t)$ = poikkeama tasapainosta,

$$c^2 = \tau/\rho = \text{jännitysvoima / tiheys}$$



Rannaehto: $u(0,t) = u(L,t) = 0$

Alkuehto: $\begin{cases} u(x,0) = f(x) = \text{muoto alkuun} \\ u_t(x,0) = g(x) = \text{alkunopeus} \end{cases}$

Ratkaisun muuttujien erottelu: $u(x, t) = F(x)G(t)$

Välittämättä kuten aikaisemmin

$$\Rightarrow F(x) = B \sin(m\pi x/L)$$

$$G(t) = C \cos(c m \pi t/L) + D \sin(c m \pi t/L)$$

Yleinen ratkaisu:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_m \cos(c m \pi t/L) + D_m \sin(c m \pi t/L) \right) \sin(m\pi x/L)$$

$$u(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin(m\pi x/L) = f(x);$$

tohten, jos $C_m = f$:n Fourier-sin-kertoim.

$$u_t(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(-C_m c m \pi / L \cdot \sin(m\pi t/L) + D_m \cdot c m \pi / L \cdot \cos(m\pi t/L) \right) \sin \frac{m\pi x}{L}$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c m \pi}{L} D_m \sin(m\pi x/L) = g(x);$$

tohten, jos $\frac{c m \pi}{L} D_m = g$:n Fourier-sin-kertoim, eli

$$D_m = \frac{2}{m\pi c} \int_0^L g(x) \sin(m\pi x/L) dx.$$

Näin siis täydellisesti meidän selville:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\underbrace{C_m \cos(m\pi c t/L)}_{\text{"alkamusta"}} + \underbrace{D_m \sin(m\pi c t/L)}_{\text{"alkamiseksi"}} \right) \sin(m\pi x/L).$$

Enn. $f(x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin(2x)$

$L = \pi$

$g(x) = 2 \sin x + \frac{1}{2} \sin(3x)$

Näin ovat valmiiksi Fourier-muotoissa

$\Rightarrow$ ei tarvitse integroida, vaan voidaan verrata
muunnokertoimia:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n \cos(nct) + D_n \sin(nct)) \sin(nx)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx) = \sin x - \frac{1}{3} \sin(2x),$$

josta $C_1 = 1$, $C_2 = -\frac{1}{3}$, $C_n = 0$, kun $n \geq 3$.

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} nc D_n \sin(nx) = 2 \sin x + \frac{1}{2} \sin(3x),$$

josta $1 \cdot c \cdot D_1 = 2$, $3 \cdot c \cdot D_3 = \frac{1}{2}$; muut $D_n = 0$

$$\Rightarrow D_1 = \frac{2}{c}, D_3 = \frac{1}{6c}$$

Siis $u(x,t) = \cos(ct) \sin x - \frac{1}{3} \cos(2ct) \sin(2x)$
 $+ \frac{2}{c} \sin(ct) \sin x + \frac{1}{6c} \sin(3ct) \sin(3x).$

Yleisesti: $\cos t \sin x = \frac{1}{2} (\sin(x+t) + \sin(x-t))$

$$\Rightarrow \cos(m\pi ct/L) \sin(m\pi x/L)$$

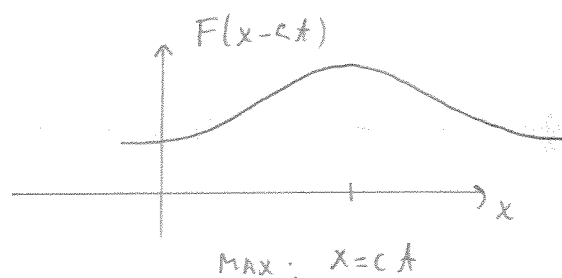
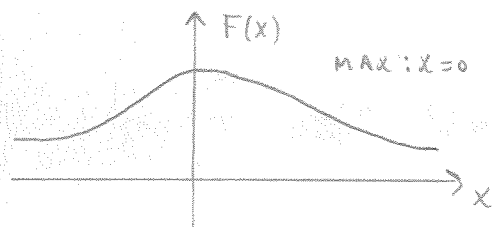
$$= \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{m\pi}{L}(x+ct)\right) + \sin\left(\frac{m\pi}{L}(x-ct)\right) \right)$$

ja vast. $\sin t \sin x = \dots$

$$\Rightarrow \text{matkustin on muotoon } u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

Mitä tarkoittaa muotoon $u(x,t) = F(x-ct)$ oleen matkustin?

$u(x,0) = F(x)$ = alkuperäinen muoto alkuun



Lauseke $F(x-ct)$ esittää aalttoa, jonka muoto on alkuun $F(x)$ ja joka liikkuu muotoonsa säilyttävien olosuhteiden nopeudella c !

Vast. $G(x+ct)$: liikkuu vastakkaiseen suuntaan nopeudella $-c$.