

Esim. Oletetaan  $f(x) = x + 3 \cos(2x)$ , kun  $x \geq 0$ .

Määritä  $f$ :n jatkua  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

a) parillisuuden

b) parittomuuden

Ratk. a)  $f(-x) = f(x)$  : parillisuus

Jos  $x < 0$ , niin täytyy olla

$$f(x) = f(-x) = -x + 3 \cos(2(-x)) = -x + 3 \cos(2x)$$

$-x \geq 0$

$$\text{Siis: } f(x) = \begin{cases} x + 3 \cos(2x), & x \geq 0 \\ -x + 3 \cos(2x), & x < 0 \end{cases} = |x| + 3 \cos(2x) = f(|x|)$$

b) pariton:  $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$ .

Jos  $x < 0$ , niin täytyy olla

$$f(x) = -f(-x) = -(-x + 3 \cos(2(-x))) = x - 3 \cos(2x)$$

$$\text{Siis: } f(x) = \begin{cases} x + 3 \cos(2x), & x \geq 0 \\ x - 3 \cos(2x), & x < 0 \end{cases}$$

Fourier-laskunsa ei kuitenkaan tarvita lausuttu arvoilla  $x < 0$ ,

koska parillisuuden / parittomuuden vuoksi kevennetään

viikkoa lasken alueen  $0 \leq x \leq L$ !

Esim.  $u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

KUVA: R. 75

Kehiti  $u(x,0)$  Fourier-sarjaksi välillä  $[0, \pi]$ .

Teht. Jatketaan  $u(x,0)$  periodiseksi  $2\pi$ -jaksolliseksi  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\uparrow$   
 $f:$

$$\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \geq 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x,0) \sin(nx) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\pi/2} x \sin(nx) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx \right)$$

$$= \dots = \frac{4}{\pi} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} = \begin{cases} 0, & n \text{ parillinen} \\ \frac{4}{\pi n^2} \sin(n\pi/2), & n \text{ pariton} \end{cases}$$

ts. jos  $n = 2k-1$ , niin

$$b_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \sin((2k-1)\pi/2) = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^2}$$

$$\Rightarrow u(x,0) = b_1 \sin x + b_3 \sin(3x) + b_5 \sin(5x) + \dots$$

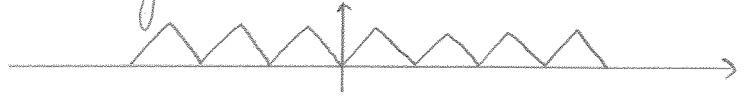
$$= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin((2n-1)x), \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

Selvennys:  $u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)t) \sin((2n-1)x)$

ts.  $u_{tt} = u_{xx}$ .

Huom. Jatkamalla perillisesti  $2\pi$ -jaksolliseksi saadaan

F-korjauksia



$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{8}{\pi} \left( \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{36} \cos(6x) + \dots \right)$$

$$a_0 \quad (a_n = \frac{2}{\pi n^2} (2 \cos(n\pi/2) - \cos(n\pi) - 1), \text{ kts Kre 9 s. 495})$$

Välillä  $[0, \pi]$  tämä esittää siis funktiota  $u(x, 0)$  yhtä hyvin, mutta ero tulee välillä  $[-\pi, 0]$  vast. sarjojen verrattuna.

## 5. Sovelluksen differentiaalilähtöihin

Tutkimme aluetta esimerkin valossa:

Esim. RLC-piiri:  $I = I(t) = \text{virta}$ ,  $E = E(t)$  jännite

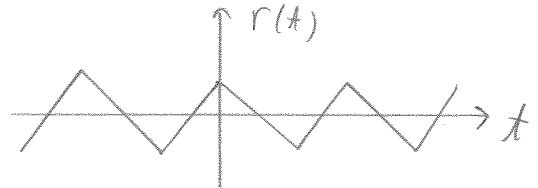
$$L I'' + R I' + \frac{1}{C} I = E'(t).$$

Valitaan lukuarvot ja merk.  $y(t) = I(t)$ ;  $r(t) = E'(t)$

$$y'' + 0,02 y' + 25 y = r(t), \text{ missä } r(t) = \frac{\pi}{2} - t, \quad 0 \leq t \leq \pi, \text{ ja}$$

$r$  on perillisinen  $2\pi$ -jaksollinen:

$$y = y(t) = ?$$



$$\text{H4: } y'' + 0,02 y' + 25 y = 0$$

$$\Rightarrow \text{ratkaisun } e^{-0,01t} (A \cos(4,9999t) + B \sin(4,9999t)) \rightarrow 0,$$

kun  $t \rightarrow \infty$

Esitämme yksittäisarvoisen F-sarjan avulla:

$$r(t) = \frac{4}{\pi} \left( \cos t + \frac{1}{9} \cos(3t) + \frac{1}{25} \cos(5t) + \dots \right) \quad (\text{HT})$$

$$= r_1(t) + r_3(t) + r_5(t) + \dots, \quad r_m(t) = \frac{4}{\pi m^2} \cos(mt), \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

Etotien  $y_m$  s.e.  $y_m'' + 0,02 y_m' + 25 y_m = r_m(t)$ ,

jolloin  $y_0 = y_1 + y_3 + y_5 + \dots$  toteuttaa  $y_0'' + 0,02 y_0' + 25 y_0 = r(t)$ !

Yleis:  $y_m(t) = A_m \cos(mt) + B_m \sin(mt)$ , sij. yhtälön:

$$(-m^2 A_m + 0,02 m B_m + 25 A_m) \cos(mt)$$

$$+ (-m^2 B_m - 0,02 m A_m + 25 B_m) \sin(mt) = \frac{4}{\pi m^2} \cos(mt)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (25 - m^2) A_m + 0,02 m B_m = \frac{4}{\pi m^2} \\ -0,02 m A_m + (25 - m^2) B_m = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_m = \frac{50(25 - m^2)}{m} B_m$$

Sij. ekrin:  $B_m = \frac{0,08}{\pi m D_m}$ ,  $D_m = (25 - m^2)^2 + (0,02 m)^2$  ("det")

Nyt  $A_5 = 0$ ,  $B_5$  on hyvin suuri mikäkin verrattuna:

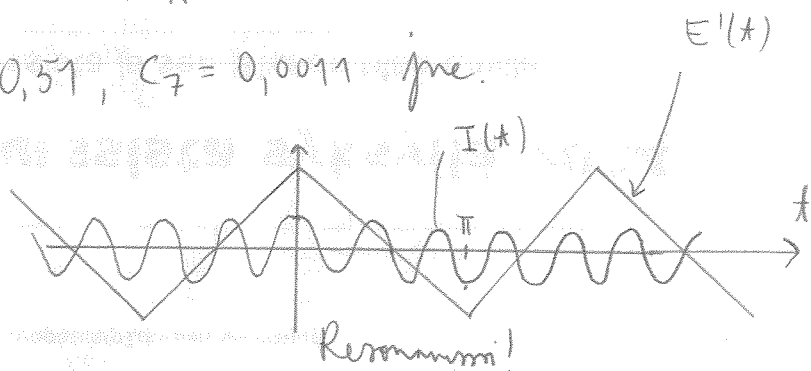
$$B_5 = \frac{0,08}{5\pi(0,02 \cdot 5)^2} = \frac{8}{5\pi}. \quad \text{Yleisesti: termien } A_m \cos(mt) + B_m \sin(mt)$$

amplitudi on  $C_m = \sqrt{A_m^2 + B_m^2} = \frac{4}{\pi m^2 \sqrt{D_m}}$ , jolloin

$$C_1 = 0,053, \quad C_3 = 0,0088, \quad C_5 = 0,31, \quad C_7 = 0,0011 \text{ jne.}$$

$$\Rightarrow y(t) \approx y_5(t) = \frac{8}{5\pi} \cos(5t)$$

(alkuvaiheen siirtymästä!)



## Approximointi trig. polynomeilla

Kuinka hyvin Fourier-sarjan osasummat approksimoivat annettua jatkuvaa funktiota välillä  $[-\pi, \pi]$ ?

Ontko Fourier-kertoimesta muodotettu trig. polynomi jossain määrin paras mahdollinen approksimaatio?

Yksi tavan varheen mittaamiseen on sisätulon

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx \quad \text{antama lauseke}$$

$$\|f\|^2 = (f, f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \geq 0.$$

$$\text{Jos siis } f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

$$\text{ja } F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^N (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)),$$

niin kertoimet  $A_n, B_n$  pitäisi valita s.e.

$$\|f - F\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - F(x))^2 dx \quad \text{on mahdoll. pieni.}$$

Lasketaan

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left( a_0^2 + 2 \cdot a_0 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) (a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)) \right) dx \\ &= 2\pi a_0^2 + 0 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad \text{käytännöllin } (\cos(mx), \sin(mx)) = 0 \text{ jos } m \neq n. \end{aligned}$$

Sijotetaan  $f \rightarrow f - F$ , jolloin saadaan

$$\|f - F\|^2 = 2\pi(a_0 - A_0)^2 + \pi \sum_{m=1}^N ((a_m - A_m)^2 + (b_m - B_m)^2) + \pi \sum_{m=N+1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2)$$

Loggimme  $A_m, B_m$  ei vaikuta, joten valitaan  $A_0 = a_0, A_m = a_m, B_m = b_m, 1 \leq m \leq N$ , antaa parhaan approksimaation.

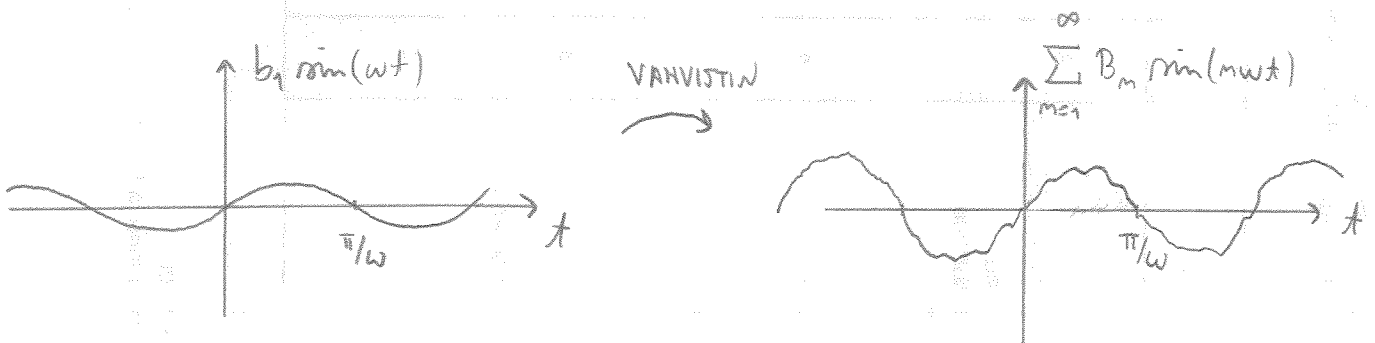
Esim. Vahvistimeen syötetään  $b_1 \sin(\omega t)$  muotoinen signaali josta häiriöiden vuoksi tulee ulos muodossa  $\sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(m\omega t)$ .

Signaalin amplitudi vahvistimen kertoimella  $B_1/b_1$ , mutta vahvistimeen sisältyvän vääristyksen vuoksi

harmonisella sisällä

$$S = \frac{\sum_{m=2}^{\infty} B_m^2}{b_1^2}$$

Tällöin siis  $S=0 \Leftrightarrow$  ulos tulee  $B_1 \sin(\omega t)$ .

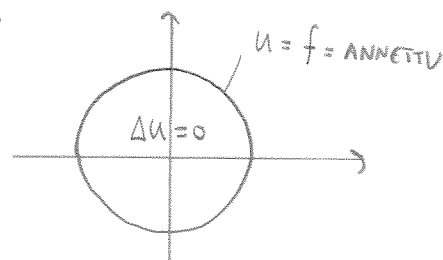


## 6. Poissonin kaava

Tarkastellaan  $F$ -sääntöä sovellettaessa Laplace-yhtälön

$R$ -säteen  $0$ -keskisen kiekon  $B(0, R)$ :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{kiekon } B(0, R) \\ u = f & \text{tunnettu kiekon reunalla } \partial B(0, R) \end{cases}$$



Ympyräsymmetria: tunnettu käyttää napakoordinaatteja  $(r, \varphi)$ :

$$U(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad U(R, \varphi) = f(\varphi), \text{ jolloin}$$

$f$  on  $2\pi$ -jaksollinen funktio!

$$\Rightarrow f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi} \quad \text{sopeutella kertoimella (j. olet.  $f$  jatk., pal.  $C^1$ )}$$

Sama pätee kiinteällä  $r$  myös funktiolle  $U(r, \varphi)$ :

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{in\varphi}, \quad \text{missä } c_n(R) = c_n = f:n \text{ F-kertoim.}$$

Tehdään tällainen yhteis yhtälön  $\Delta U = 0$ :

$$U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\varphi\varphi} = 0, \quad \text{siis.}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( c_n''(r) + \frac{1}{r} c_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} c_n(r) \right) e^{in\varphi} = 0; \text{ totentum,}$$

$$\text{jos } c_n''(r) + \frac{1}{r} c_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} c_n(r) = 0 \quad \forall n, \text{ ts.}$$

$$r^2 c_n''(r) + r c_n'(r) - n^2 c_n(r) = 0 \quad \text{Eulerin yhtälö; yllä } c_n(r) = r^n$$

$$\text{rij.} \Rightarrow \underbrace{(\alpha(\alpha-1) + \alpha - m^2)}_{=0} r^\alpha = 0$$

$$=0 \Rightarrow \alpha = \pm m$$

Ratkaisun muotoon  $C_m(r) = A_m r^m + B_m r^{-m}$ ;

mutta ratkaisun ei voi esiintyä  $1/r, 1/r^2, \dots$  termejä,

koska  $U$ :n täytyy olla määritelty pisteen  $r=0$

$$\Rightarrow C_m(r) = D_m r^{|m|}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Siiir:  $U(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m r^{|m|} e^{im\varphi}$  tot. Laplace-yhtälön;

mitä on  $D_m$ ? Sijaitetaan  $r=R$ :

$$f(\varphi) = U(R, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m R^{|m|} e^{im\varphi}; \text{ totentun, jor}$$

solitaan  $D_m R^{|m|} = C_m = f$ :in  $F$ -kernin!

Legendre:  $U(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \left(\frac{r}{R}\right)^{|m|} e^{im\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{|m|} e^{im(\varphi-t)}}_{\equiv P(r, \varphi-t)} dt$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, \varphi-t) dt, \text{ missin}$$

$$P(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{|m|} e^{im\varphi} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r e^{i\varphi}}{R}\right)^m + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r e^{-i\varphi}}{R}\right)^m$$

$$= 1 + \frac{r e^{i\varphi}/R}{1 - r e^{i\varphi}/R} + \frac{r e^{-i\varphi}/R}{1 - r e^{-i\varphi}/R} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos \varphi + r^2} = \text{Poisson-ydin.}$$