

I Kompleksianalyysi

1. Kentästä: Katso Apolin perus tai tiivistelmä kurssin kotisivulta.

2. Analyttiset funktiot

Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ joukko. Funktiota $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ sanotaan kompleksimuuttujan funktioksi l. lyhyesti kompleksifunktioksi.

Jos $z = x + iy \in D$, niin voidaan muodostaa
 $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)) \in \mathbb{R}$ ja
 $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy)) \in \mathbb{R}$.

Tulkinnalla $(x, y) \hat{=} x + iy$ voidaan siis
ajatella, että $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ ovat kahden reaalimuuttu-
jan funktiota, ja
$$f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y).$$

Esim. (i) $f(z) = z^2$, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\text{Tällöin } f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Rightarrow u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy$$

(ii) $f(z) = e^z$, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(x+iy) = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

$$\Rightarrow u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y.$$

Kompleksifunktion jatkuvuus

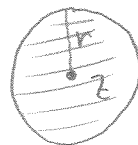
Terminologia: joukon $D \subset \mathbb{C}$ reuna ∂D koostuu niistä pisteistä $z \in \mathbb{C}$, jille

$B(z,r)$ leikkaa sekä D :tä että $\mathbb{C} \setminus D$:tä kaikilla $r > 0$.

Tällöin $B(z,r) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w-z| < r\}$ = z -keskisen



r -säteen
kiekko =



Joukko $U \subset \mathbb{C}$ on avoin, jos $\partial U \cap U = \emptyset$.

Joukko $K \subset \mathbb{C}$ on suljettu, jos $\partial K \subset K$.

Siis: avoin = mikään reunapiste ei kuulu joukkoon
suljettu = kaikki reunapistet kuuluvat joukkoon

Jatkuvuus Kompleksifunktion jatkuvuus

voidaan määritellä tutkimaan suppenemista $\mathbb{C}$:ssä, mutta helpommin funktioiden u ja v avulla:

Def. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ ja $f: D \rightarrow \mathbb{C}$. Jos $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, niin f on jatkuvuuspiste z_0 , mikäli sekä $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ että $v: D \rightarrow \mathbb{R}$ ovat jatkuvia pisteessä (x_0, y_0) . Jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $z_0 \in D$, niin se on jatkuva D :ssä.

Esim. • Kompleksiset polynomit ovat jatkuvia $\mathbb{C}$:ssä, koska u ja v ovat kahden muuttujan polynomeja = jatkuvia
• Eksponenttifunktio $f(z) = e^z$ on jatkuva $\mathbb{C}$:ssä.

Esim. (i) Olkoon $\arg z \in (-\pi, \pi]$ luvun z argumentin pääarvo.

Tällöin $f(z) = \arg z$ ei ole jatkuva negatiivisen reaaliosan $\mathbb{R}_- = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$ pisteissä. Mutta f on jatkuva joukossa $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

(ii) Funktio $\log: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$

$$\log z = \ln r + i \arg z = \ln \sqrt{z\bar{z}} + i \arg z$$

on jatkuva $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$:ssä, mutta ei missään pisteessä $z_0 \in \mathbb{R}_-$.

$$(\text{Huom: } \frac{d}{dt}(x(t)+iy(t)) = x'(t)+iy'(t), t \in \mathbb{R})$$

4

Derivaatta Tavallinen derivaatta / osittaisderivaatat:

tutkitaan erotusosamäärää "suorien pithin".

Kompleksin derivaatta: tutkitaan erotusosamäärää "kaikella mahdollisella tavalla" ja toditaan, että aina saadaan sama tulos.

Def. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin joukko, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ funktio ja $z_0 \in D$. Sanotaan: f on derivoitu pisteessä z_0 , jos on olemassa

$$f'(z_0) \equiv \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}}_{\text{Huom: lausekkeen määrittelyyn tarvitaan jatkoluokan: ei olemasta } \mathbb{R}^2 \text{ :on!}}$$

Miten tarkoitetaan $\lim_{\Delta z \rightarrow 0}$?

lausekkeen määrittelyyn tarvitaan jatkoluokan: ei olemasta $\mathbb{R}^2$:on!

Vastaus: jos jonoille (x_n) ja (y_n) pätee $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$,

mutta $x_n + iy_n \neq 0 \forall n$, niin raja-arvoista



$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_0 + (x_n + iy_n)) - f(z_0)}{x_n + iy_n}$ tähtyy aina tulla sama tulos.

Def. Jos $D \subset \mathbb{C}$ on avoin ja $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ on derivoitu jokaisessa pisteessä $z_0 \in D$, niin f on analyttinen.

(jossakin kirjassa: analyttinen = holomorfinen)

Esim. $f(z) = z^2$.

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \frac{2z_0 \Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} \\ = 2z_0 + \Delta z, \text{ for } \Delta z \neq 0$$

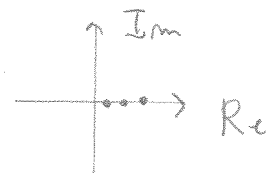
$\Rightarrow f'(z_0) = 2z_0$; f on analyyttinen $\mathbb{C}$:ssä

Esim. $f(z) = \bar{z}$

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\overline{(z_0 + \Delta z)} - \bar{z}_0}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

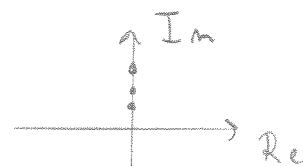
Valitaan raja-arvossa $y_n = 0 \forall n, x_n \neq 0, \lim x_n = 0$

$$\Rightarrow \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = 1 \quad \forall n \Rightarrow \lim = 1;$$



valitaan raja-arvossa $x_n = 0 \forall n, y_n \neq 0, \lim y_n = 0$

$$\Rightarrow \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\overline{i y_n}}{i y_n} = \frac{-i y_n}{i y_n} = -1 \quad \forall n$$



Eri tulokset $\Rightarrow$ ei derivoitua määrittämissä pisteissä!

Huom: $f(z) = \bar{z} \Rightarrow u(x, y) = x, v(x, y) = -y$

Semmoin: "on olemassa $f'(x_0 + i y_0)$ "

$\neq$ "u ja v ovat osittaisderivoituvia (x_0, y_0) :ssä"

Voidaan osoittaa: analyyttiselle funktiolle
ovat voimassa "kaikki tavalliset" derivoimis-
säännöt, kuten

$$\bullet (af)' = a f', \quad a \in \mathbb{C} \text{ vakio}$$

$$\bullet (f+g)' = f' + g'$$

$$\bullet (f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$\bullet (f \circ g)' = (f' \circ g) g'$$

Liikkeen:

$$\bullet f \text{ derivoitun}$$

$$\Rightarrow f \text{ jatkuva}$$

$$\bullet f'(z) \equiv 0$$

$$\Rightarrow f \equiv \text{VAKIO}$$

Seuraus Kaikki polynomit $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$
ovat analyyttisiä $\mathbb{C}$:ssä.

Ongelma: Voiko analyyttisyyttä tutkia muuten kuin
erottamismäärän avulla?

Vast: Voi; C-R-yhtälöiden kautta.

3. Cauchy-Riemann-yhtälöt

Idea: $f = u + iv$; täytyy olla jokin yhteys $f' \Leftrightarrow u_x, u_y, v_x, v_y$?

Olkoon $f = u + iv$ ja yhtälöiden liittää f' osittaisderivaattoihin
 u_x, u_y, v_x, v_y .

Jos on olemassa $f'(x_0 + iy_0)$, niin se voidaan
laskea

a) tutkimaan "reaalisia polkkeitä":

$$f'(x_0 + iy_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + h) - f(x_0 + iy_0)}{h} \quad (h \in \mathbb{R})$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) + i v(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0) - i v(x_0, y_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h}$$

$$= u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$$

$$(\text{PERIAATE: } \exists \lim_{h \rightarrow 0} (a(h) + i b(h)) \Leftrightarrow \exists \lim_{h \rightarrow 0} a(h) \text{ ja } \lim_{h \rightarrow 0} b(h))$$

b) tutkimaan "puhtaasti imaginäärisiä polkkeitä":

$$f'(x_0 + iy_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + ih) - f(x_0 + iy_0)}{ih} \quad (h \in \mathbb{R})$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + h) + i v(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0) - i v(x_0, y_0)}{ih}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{h} + \frac{1}{i} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{h}$$

$$= v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0), \text{ koska } \frac{1}{i} = -i.$$

Siis: $u_x = v_y$ ja $v_x = -u_y$.

Seuraus Jos $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on analyyttinen avoimen joukon $D \subset \mathbb{C}$, niin funktiot u ja v toteuttavat D :ssä

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{array} \right\} = \text{Cauchy-Riemann-yhtälöt} \\ (\text{C-R})$$

Tulos pätee tietyssä mielessä myös kääntäen:

Jos $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia ja toteuttavat C-R-yhtälöt koko D :ssä, niin niiden avulla muodostettu funktio $f = u + iv: D \rightarrow \mathbb{C}$ on analyyttinen D :ssä.

(Todistus on hankalampi kuin yllä ja sivustetaan)

Esim. $f(z) = e^z \Rightarrow u(x, y) = e^x \cos y, v(x, y) = e^x \sin y$

$$\text{ja } u_x = e^x \cos y = \frac{\partial}{\partial y} (e^x \sin y) = v_y,$$

$$v_x = e^x \sin y = -\frac{\partial}{\partial y} (e^x \cos y) = -u_y.$$

Siksi: $f(z) = e^z$ on analyyttinen $\mathbb{C}$:ssä.