

Kompleksiluvuista

Pekka Alestalo

10. syyskuuta 2007

1 Lukujoukot

Tutkitaan aluksi yhtälöiden ratkaisemista, kun yhtälön astetta kasvataan ja samalla kertoimina käytetään yhä yleisempiä lukuja.

1.1 1. asteen yhtälö

Yksinkertaisin (jollain tavalla mielenkiintoinen) yhtälö lienee muotoa

$$x + a = b,$$

missä a ja b ovat luonnollisia lukuja. Yhtälöllä ei aina ole ratkaisua x luonnollisten lukujen joukossa. Kuitenkin monissa lukumäärän laskemiseen liittyvissä tilanteissa luvun x konkreettinen tulkinta tuntuu täysin selvältä. Jos haluamme esittää tällaisia ratkaisuja matemaattisesti, on siirryttävä luonnollisia lukuja suurempaan lukujen joukkoon, kokonaislukuihin.

Siirrytään hieman vaativampaan yhtälöön

$$qx = p,$$

missä kertoimet $q \neq 0$ ja p ovat kokonaislukuja. Yhtälöllä on ratkaisu kokonaislukujen joukossa vain poikkeustapauksissa: vaatimus yhtälön ratkeavuudesta kaikissa tapauksissa vaatii edelleen suurempaa lukujoukkoa, rationaalilukuja.

1.2 2. asteen yhtälö

Esimerkiksi geometriaan liittyvissä tehtävissä törmätään toisen asteen yhtälöön

$$x^2 = 2,$$

jossa ei, ehkä hieman yllättäen, ole rationaalista ratkaisua. Vaatimus tällaisten geometrinen ilmiöiden matemaattisesta käsittelystä pakottaa edelleen laajentamaan lukujoukkoa rationaaliluvuista reaalityihin.

Monilla toisen asteen yhtälöillä ei kuitenkaan ole ratkaisuja edes reaalityihin. Yksinkertaisin tällainen yhtälö lienee muotoa $x^2 = -1$. Yleisessä tapauksessa toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$ voidaan neliöön täydentämällä saattaa muotoon

$$(x + b/2a)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Jos yhtälön diskriminantti $D = b^2 - 4ac$ on positiivinen, niin yhtälön ratkaisuksi saadaan

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Jos $D = 0$, niin kyseessä on kaksoisjuuri $-b/2a$. Tapauksessa $D < 0$ ei reaalilukuisia ratkaisuja ole.

Suoralta kädeltä ei ole olemassa mitään konkreettista syytä, miksi kaikilla toisen asteen yhtälöillä pitäisi ylipäänsä olla ratkaisuja, joten yllä olevaan ratkaisukaavaan ei tässä mielessä sisälly mitään kummallista. Vakavampia ongelmia syntyy kuitenkin silloin, kun ryhdytään tutkimaan kolmannen asteen yhtälöitä.

1.3 3. asteen yhtälö

Tarkastellaan aluksi yleistä kolmannen asteen yhtälöä $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Jakamalla vakiolla $a \neq 0$ yhtälö voidaan kirjoittaa myös muodossa $x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$. Samoin kuin jokaisella paraabelilla on huippu, on kolmannen asteen käyrällä $y = x^3 + Bx^2 + Cx + D$ yksi erikoisasemassa oleva piste: käyrän käännepiste. Sen x -koordinaatti saadaan yhtälöstä

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^3 + Bx^2 + Cx + D) = 0 \Leftrightarrow x = -B/3.$$

Käyrän kuperuussuunta vaihtuu käännepestessä, joten ilmeisesti käyrä on käännepesteen suhteen tarkasteltuna "symmetrisempi" kuin alkuperäisessä muodossa. Kun käännepeste siirretään muuttujanvaihdolla $z = x - (-B/3) = x + B/3$ kohtaan $z = 0$, niin yhtälö $x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ yksinkertaistuu muotoon

$$z^3 + pz + q = 0,$$

missä $p = B - C^2/3$ ja $q = D - BC/3 + 2B^3/27$. Jokaisesta kolmannen asteen yhtälöstä voidaan siis poistaa toisen asteen termi alkuperäiseen muuttujaan tehdyllä siirroilla. Jos yksinkertaisemman yhtälön ratkaisut z saadaan selville, saadaan myös alkuperäisen yhtälön ratkaisut muodossa $x = z - B/3$.

Johdetaan seuraavaksi yhtälön $z^3 + pz + q = 0$ ratkaisukaava. Sijoitetaan tuntemattoman paikalle $z = u + v$, missä u ja v ovat uusia tuntemattomia. Ajatuksena on se, että kahteen tuntemattomaan sisältyy niin paljon valinnanvapautta, että sopivilla valinnoilla yhtälö yksinkertaistuu. Sijoituksen jälkeen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0.$$

Tämä yhtälö toteutuu ainakin silloin, kun

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ uv = -p/3. \end{cases}$$

Jälkimmäisestä yhtälöstä seuraa, että $u^3 v^3 = -(p/3)^3$. Tuntemme siis lukujen u^3 ja v^3 summan ja tulon, joten nämä luvut saadaan erään toisen asteen yhtälön ratkaisuina. Kyseessä oleva yhtälö on muotoa

$$w^2 + qw - (p/3)^3 = 0,$$

joten saadaan (esimerkiksi)

$$\begin{cases} u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4 \cdot (p/3)^3}}{2}, \\ v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4 \cdot (p/3)^3}}{2}. \end{cases}$$

Yhtälön $z^3 + pz + q = 0$ ratkaisu saadaan siis muodossa

$$z = u + v = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + 4 \cdot (p/3)^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + 4 \cdot (p/3)^3}}{2}},$$

joka tunnetaan nimellä kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaava. Kaava näyttäisi ensisilmäyksellä antavan vain yhden ratkaisun, mutta tarkempi analyysi paljastaa myös muut kaksi ratkaisua.

Ratkaisukaavaan sisältyy kuitenkin suuria periaatteellisia ongelmia. Jokaisella kolmannen asteen yhtälöllä on ainakin yksi reaalinen ratkaisu, mutta tapauksessa $q^2 + 4 \cdot (p/3)^3 < 0$ ratkaisukaava ei reaalilukujen maailmassa anna ainuttakaan ratkaisua! Konkreettinen esimerkki on yhtälö

$$z^3 - 15z - 4 = 0,$$

jonka kaikki juuret ovat reaalisia: $z_1 = 4$, $z_2 = -2 + \sqrt{3}$, $z_3 = -2 - \sqrt{3}$. Toisaalta ratkaisukaavan mukaan pitäisi olla

$$z = \sqrt[3]{\frac{4 + \sqrt{-484}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4 - \sqrt{-484}}{2}}.$$

Tällaiset ristiriitaisilta näyttävät tilanteet pakottavat tutkimaan tarkemmin negatiivisten lukujen neliöjuuria.

Seuraavissa luvuissa juurtamiseen liittyvä ongelma ratkaistaan kompleksilukujen avulla. Palaamme sen jälkeen yllä olevaan esimerkkiin ja selvitämme, mistä siinä on kysymys.

2 Kompleksiluvut

2.1 Kompleksilukujen määritelmä

- Kompleksiluku $z = x + iy$, reaaliosa $x = \operatorname{Re} z$, imaginaariosa $y = \operatorname{Im} z$.
- Imaginaariyksikkö i , jolle $i^2 = -1$. Muuten tavalliset laskulait:

$$\begin{aligned} (x + iy) + (a + ib) &= (x + a) + i(y + b), \\ (x + iy) \cdot (a + ib) &= (xa - yb) + i(xb + ya) \end{aligned}$$

- Peruslaskutoimitusten yleiset säännöt (vaihdamentalaki, liitäntälaki, osittelulaki) ovat voimassa kompleksiluvuille.
- Kompleksilukujen joukkoa merkitään $\mathbf{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbf{R}\}$. Jos kompleksiluku $x + iy$ tulkitaan geometrisesti tason pisteeksi $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, ei määritelmässä ole mitään "imaginaarista".
- Liittoluku $\bar{z}$: Jos $z = x + iy$, niin $\bar{z} = x - iy$.

- Ominaisuuksia:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad z \bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbf{R}$$

- Jakolasku:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

2.2 Polaariesitys

- Kompleksiluvun $z = x + iy$ moduli eli pituus:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Argumentti eli vaihekulma φ määräytyy yhtälöparista

$$\begin{cases} \cos \varphi = x/r \\ \sin \varphi = y/r \end{cases}$$

luvun 2π monikertaa vaille (lyhennetään (mod 2π)). Jos $x > 0$, niin $\arg z = \arctan(y/x)$ (mod 2π).

- Polaariesitys:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ missä } r = |z| \text{ ja } \varphi = \arg z$$

- Yhteys kertolaskuun:

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ \implies z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

- de Moivre'n kaava:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

- Eulerin kaava: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
- Ominaisuudet: samat kuin reaaliossa tapauksessa:

$$e^{-ix} = 1/e^{ix}, \quad (e^{ix})^n = e^{inx}, \quad e^{ix} e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

- Polaariesitys eksponenttimuodossa:

$$z = r e^{i\varphi}, \text{ missä } r = |z| \text{ ja } \varphi = \arg z$$

- Yhteys trigonometrisiin funktioihin:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

3 Polynomi yhtälöt

3.1 Nollakohdat ja jaollisuus

n -asteisen polynomi yhtälön $P(x) = 0$ ratkaisuille (eli yhtälön *juurille*) on olemassa *ratkaisukaava* ainoastaan tapauksissa $n = 1, 2, 3, 4$. Jos polynomin aste on $n \geq 5$, niin voidaan osoittaa, ettei "yleisen" polynomin ainuttakaan juurta saada selville soveltamalla äärellistä määrää peruslaskutoimituksia ja juuren ottamisia polynomin kertoimiin. Konkreettinen esimerkki tällaisesta on yhtälö $z^5 - 6z + 3 = 0$, jolla on kolme reaalista ja kaksi muuta juurta; ko. ominaisuuden todistaminen on tosin hyvin hankalaa.

Sen sijaan juurten numeerisia likiarvoja voidaan laskea esim. Newtonin menetelmällä, mutta se kuuluu hieman toiseen aihepiiriin.

Yksittäisen juuren löytäminen helpottaa aina tilannetta, koska yhtälön astelukua voidaan tämän avulla pienentää.

Lause 3.1 *Jos polynomilla $P(z)$ on nollakohta z_0 , niin $P(z)$ on jaollinen polynomilla $z - z_0$, ts. on olemassa sellainen polynomi $Q(z)$, että $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ kaikilla $z \in \mathbf{C}$.*

TODISTUS: Olkoon $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$. Koska $P(z) = P(z) - P(z_0)$ ja jokaisesta termistä $z^k - z_0^k$ voidaan kaavan

$$(a - b)^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$$

perusteella erottaa tekijäksi $z - z_0$, niin väite seuraa. $\square$

Mutta onko kaikilla polynomeilla nollakohtia? Vastauksen antaa seuraava ns. Algebran peruslause.

Lause 3.2 *Jokaisella kompleksikertoimisella polynomilla on (ainakin yksi) nollakohta $z_0 \in \mathbf{C}$.*

Sivuutamme todistuksen, joka on hieman hankala. Yhdistämällä aikaisemmat tulokset voidaan polynomi yhtälön astetta siis aina pienentää yhdellä; kun tätä jatketaan mahdollisimman pitkälle, päädytään seuraavaan tulokseen.

Lause 3.3 *Jos $n \geq 1$, niin jokainen n -asteinen polynomi voidaan jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin, joita on yhteensä n kappaletta.*

Joissakin tapauksissa osa tekijöistä on samoja, jolloin kyseessä on moninkertainen nollakohta. Jos yleisesti

$$P(z) = a(z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m},$$

missä $z_1, \dots, z_m$ ovat eri kompleksilukuja, niin nollakohdan z_i kertaluku on k_i . Asteita vertaamalla todetaan, että $k_1 + \dots + k_m = n$.

Jos reaalikertoiminen polynomi halutaan jakaa mahdollisimman pieniin tekijöihin ilman, että kertoimiksi täytyy sallia kompleksilukuja, voidaan aina edetä toisen asteen tekijöihin.

Lause 3.4 *Jos reaalikertoimisella polynomilla on nollakohta $a + ib$, niin myös $a - ib$ on polynomin nollakohta.*

TODISTUS: Jos $P(a + ib) = 0$, niin

$$0 = \bar{0} = \overline{P(a + ib)} = P(a - ib)$$

liittoluvun ominaisuuksien ja reaalikertoimisuuden vuoksi. $\square$

Lause 3.5 *Reaalikertoiminen polynomi on joko vakio tai se voidaan jakaa reaalisiin 1. tai 2. asteen tekijöihin.*

TODISTUS: Jos yleisessä tekijöihinjaossa esiintyy 1. asteen kompleksisia tekijöitä $z - (a + ib)$, niin jokaista tällaista vastaa myös tekijä $z - (a - ib)$. Kertomalla nämä keskenään saadaan reaalinen toisen asteen tekijä

$$(z - (a + ib))(z - (a - ib)) = z^2 - 2az + (a^2 + b^2).$$

Tällä tavalla kaikki kompleksiset tekijät voidaan poistaa. $\square$

Yhtenä seurauksena voidaan todeta, että jokainen rationaalifunktio (muotoa $P(x)/Q(x)$, missä P ja Q polynomeja) voidaan integroida (reaalisten) alkeisfunktioiden avulla: nimittäjä $Q(x)$ jaetaan reaalisiin 1. tai 2. kertaluvun termeihin, jolloin osamurtohajotelman kaikki mahdolliset termit voidaan integroida yksitellen.

3.2 Polynomiyhtälö $z^n = c$

Tarkastellaan esimerkkinä n :nnen juuren laskemista kompleksiluvusta c , eli yhtälön $z^n = c$ kaikkien mahdollisten ratkaisujen määrittämistä. Ideana on kirjoittaa polaarimuodossa $c = re^{i\varphi}$, $z = se^{it}$, jolloin saadaan yhtälö

$$s^n e^{int} = re^{i\varphi}.$$

Tämä toteutuu vain silloin, kun $s^n = r$ ja $nt = \varphi + k \cdot 2\pi$ jollakin $k \in \mathbf{Z}$. Saadaan siis $s = r^{1/n} = \sqrt[n]{r}$ ja $t = \varphi/n + k \cdot 2\pi/n$. Jaksollisuuden perusteella tapauksissa $k = 0, 1, \dots, n-1$ saadaan kaikki mahdolliset erilaiset arvot.

Määritelmä 3.6 Olkoon $c = |c|e^{i\varphi}$, missä $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Tällöin n . juuri luvusta c koostuu luvuista

$$\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{|c|}e^{i\varphi/n + 2\pi k/n} = \sqrt[n]{|c|}(\cos(\varphi/n + 2\pi k/n) + i \sin(\varphi/n + 2\pi k/n)),$$

missä k käy läpi arvot $0, 1, 2, \dots, n-1$.

Joissakin kirjoissa merkinnällä $\sqrt[n]{c}$ tarkoitetaan juuren pääarvoa, joka saadaan arvolla $k = 0$.

Erityisesti tapauksessa $n = 2$ ratkaisut ovat $\sqrt{c}$ ja $e^{i2\pi/2}\sqrt{c} = -\sqrt{c}$ aivan kuten reaalilukujen kohdalla. Aikaisemman neliööntäydennysperiaatteen nojalla toisen asteen yhtälön $az^2 + bz + c = 0$ ratkaisukaava

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

on siis voimassa myös kompleksisten kerrointen tapauksessa ja ilman rajoitusta $D = b^2 - 4ac \geq 0$.

3.3 3. asteen yhtälön ratkaisukaavan tulkinta

Palataan vielä lyhyesti yhtälön $z^3 - 15z - 4 = 0$ ratkaisukaavan tulkintaan. Uusien tietojemme avulla ratkaisukaavan antama tulos voidaan sieventää muotoon

$$z = \sqrt[3]{\frac{4 + \sqrt{-484}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4 - \sqrt{-484}}{2}} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}.$$

Koska $(2 + i)^3 = 2 + 11i$ ja $(2 - i)^3 = 2 - 11i$ ja lukujen argumentit ovat oikeilla väleillä, niin juurten arvot ovat $2 + i$ ja $2 - i$, joiden summana saadaan yhtälön ratkaisu $z = 4$.