Teknillinen korkeakoulu Alestalo/Wallin
Matematiikka

Mat-1.1230 Matematiikan peruskurssi S3, syksy 2007

Laskuharjoitus 7L loppuviikoilla 43 ja 44 (24.10. ja 1.-2.11.)

Nämä tehtävät on tarkoitus laskea kotona; ratkaisut käsitellään harjoituksissa.
(Aihepiiri: Kre9 12.4–5, Kre8 11.4–5)

1. Osoita derivoimalla, että funktio $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ on aaltoyhtälön $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ratkaisu, kun $x \in \mathbf{R}$ ja $t > 0$. Tässä f ja g ovat mitä tahansa kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvia funktioita ja c on vakio.

2. (Jatkoa edelliseen) Oletetaan, että hetkellä $t = 0$ on $u(x,0) = \sin x$ ja

$$u_t(x,0) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\Big|_{t=0} = 0.$$

   Määritä näiden alkuehtojen avulla funktiot f ja g ja edelleen ratkaisu $u(x,t)$. (Huom: Välivaiheissa saattaa esiintyä tuntemattomaksi jäävä vakio, mutta lopullisen vastauksen $u(x,t)$ täytyy olla yksikäsitteinen. Tehtävän tilanne vastaa koko reaaliakselilla liikkuvia aaltoja, joiden amplitudi on $u(x,t)$.)

3. Metallisauvan ($0 \le x \le \pi$) alkulämpötila on muotoa $u(x,0) = 100x$. Hetkellä $t = 0$ sen molemmat päät asetetaan jäävesikylpyyn, jonka vaikutuksesta $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ kaikilla $t \ge 0$. Määritä sauvan lämpötila $u(x,t)$ Fourier-sarjan muodossa.
   Vihje: Tehtävässä voi soveltaa luennolla johdettua ratkaisun yleistä lauseketta ja tehtävässä 5/6A laskettua Fourier-sarjaa.

4. Pitkässä käytävässä olevan höyrystyneen alkoholin konsentraatio on muotoa $c(x,0) = 3 - 2\cos(\pi x/10)$, yksikkönä mmol/m^3, ja $0 \le x \le 10$.
   a) Hahmottele konsentraation $c(x,0)$ kuvaajaa muuttujan x suhteen.
   b) Kuinka kauan kestää konsentraation $c(x,t)$ tasoittuminen diffuusion vaikutuksesta niin, että ero huoneen maksimi- ja minimikonsentraatioiden välillä on 0,5 mmol/m^3? Höyrystyneen alkoholin diffuusiokerroin D ilmassa on 0,137 cm^2/s, kun lämpötila on 40 °C.
   Vihje: Luennolla johdettiin diffuusioyhtälön $c_t = Dc_{xx}$ yleinen ratkaisu $c(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-Dn^2\pi^2 t/L^2} \cos(n\pi x/L)$. Ratkaisu saadaan siis vertaamalla kertoimia hetkellä $t = 0$.

5.–6. Jännitetty kieli värähtelee elastisen materiaalin sisällä, jolloin poikkeama $u(x,t)$ noudattaa yhtälöä $u_{tt} = c^2 u_{xx} - \gamma^2 u$, missä γ on ympäröivän materiaalin elastisuudesta riippuva vakio. Olkoon kielen pituus L ja alkutila $f(x) = u(x,0)$, $g(x) = u_t(x,0) = 0$. Ratkaise u erottelemalla muuttujat. Miten γ vaikuttaa ominaisvärähtelyjen taajuuteen? Vihje: Tee yrite $u(x,t) = F(x)T(t)$; käsittele ensin yhtälö $F'' - kF = 0$.
   (V: $\sum B_n \cos(\alpha_n t) \sin(\lambda_n x)$, missä $\lambda_n = n\pi/L$, $\alpha_n^2 = c^2\lambda_n^2 + \gamma^2$ ja kertoimet B_n saadaan f:n Fourier-sinisarjasta)

Vastaa kurssikyselyyn kotisivulla! Vastausaikaa viikot 43–44 eli 4.11. saakka.