

Mat-1.1230 Matematiikan peruskurssi S3, syksy 2007

Laskuharjoitus 7A alkuviikolla 43 (22.-24.10.)

Näitä tehtäviä lasketaan vasta harjoituksissa. Tehtäviä voi silmäillä ennen harjoitusta ja kerrata tarvittavaa aihepiiriä kurssimateriaalista.

(Luennot tai Kre9 12.1–3; Kre8 11.1–3)

1. Määritä ainakin yksi (epätriviaali) ratkaisu $u = u(x, y)$ osittaisdifferentiaaliyhtälölle $u_{xy} - xu = 0$ käyttämällä muuttujien erottelua eli muotoa $u(x, y) = F(x)G(y)$ olevaa yritettä.
2. Määritä osittaisdifferentiaaliyhtälöön $u_t = u_{xx} - u_x - 2u$ liittyvä tasapainoratkaisu $u(x, t) \equiv u_0(x)$, jolle siis $u_t \equiv 0$. Tässä $0 \leq x \leq 1$ ja reuna-arvoina on $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 10$ kaikilla $t \geq 0$.
3. Sivuiltaan eristetyn metallisauvan päät $x = 0$ ja $x = L$ pidetään lämpötiloissa 20°C ja 100°C . Määritä sauvan lämpötilan tasapaino-kauma, kun sauvan pituus on L . Vihje: $u_t = c^2 u_{xx}$ ja tasapainotilassa $u_t(x, t) = 0$.
4. Tarkastellaan jännitettyä kieltä, jonka päät on kiinnitetty pisteisiin $x = 0$ ja $x = \pi$ ja jolle aaltoyhtälössä $c = 2$, ts. $u_{tt} = 4u_{xx}$. Hetkellä $t = 0$ kielen muotoa kuvaa funktio

$$f(x) = u(x, 0) = k \left(\frac{1}{3} \sin x - \frac{1}{4} \sin(5x) \right),$$

missä k on vakio. Määritä kielen liike, kun sen nopeus on alussa nolla eli $u_t(x, 0) = 0$.

Vihje: Ratkaisuperiaate oli esillä jo Fourier-sarjojen kohdalla: jokaista termiä $\sin(nx)$ vastaa sille ominainen aikakehitys $\cos(\omega_n t)$. Tehtävän voi ratkaista "kokeilemalla"; muuttujien erottelua tms. ei tarvitse tehdä alusta alkaen.

5. Kuten edellinen tehtävä, mutta nyt $u(x, 0) = 0$ ja

$$u_t(x, 0) = k \left(\frac{1}{3} \sin x - \frac{1}{4} \sin(5x) \right).$$

Vihje: Aikakehitys on nyt muotoa $\sin(\omega_n t)$.

Huom: Alkuviikolla 22.–24.10. ei ole luentoja. Luennot jatkuvat tenttiviikon jälkeen torstaina 1.11. klo 10.10 Erkki Somersalon voimin. Tenttiviikolla 25.–31.10. ei ole luentoja eikä harjoituksia.