

Mat-1.1230 Matematiikan peruskurssi S3, syksy 2007

Laskuharjoitus 6L loppuviikolla 42 (17.-19.10.)

Nämä tehtävät on tarkoitus laskea kotona; ratkaisut käsitellään harjoituksissa.
(Aihepiiri: Kre9 11.1–5, Kre8 10.1–6)

1. Tarkastellaan kompleksimuotoista 2π -jaksollista Fourier-sarjaa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Johda kerrointen c_n integraalilauseke käyttämällä alkuvuikon tehtävän 2 tuloksia.

Vihje: Kertoimen c_k laskemiseksi kerro yhtälö puolittain lausekkeella e^{-ikx} ja integroi.

2. Määritä kompleksimuotoinen Fourier-sarja 2π -jaksolliselle funktiolle $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, jolle $f(x) = x$, kun $-1 < x \leq 1$.
3. Muokkaa edellisen tehtävän lopputulos reaaliseen muotoon sieventämällä lausekkeet $c_{-n}e^{-in\pi x/L} + c_n e^{in\pi x/L}$, kun $n \geq 1$.
4. Muodosta sekä parillinen että pariton 2π -jaksollinen jatke funktiolle $f(x) = x(\pi - x)$, $0 \leq x \leq \pi$; kuvio riittää. Määritä parillisen jatkeen Fourier-sarja. Millaisen kaavan saat sijoittamalla sarjakehitelmään $x = 0$? Integraalit $\int_0^\pi x \cos(nx) \, dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$,
 $\int_0^\pi x^2 \cos(nx) \, dx = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}$ oletetaan tunnetuiksi.
Vast: $\pi^2/6 - \sum \cos(2nx)/n^2$.

5. Määritä differentiaaliyhtälön $y'' + \omega^2 y = r(t)$ yksittäisratkaisu, kun

$$r(t) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2nt).$$

Oletetaan, ettei ω ole parillinen kokonaisluku.

Vihje: Etsi kutakin Fourier-sarjan termiä $r_n(t)$ vastaavan epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu $y_n(t)$, jolloin $y_0 = \sum y_n$ on alkuperäisen yhtälön yksittäisratkaisu.

6. Olkoon edellisessä tehtävässä $\omega^2 = 16,01$. Tutki ratkaisusarjan termien kerrointen suuruusluokkaa ja ja totea, että yksi niistä on hallitseva. Hahmottele tämän avulla yksittäisratkaisun ratkaisun kuvaajaa ja vertaa sitä jaksollisuuden osalta funktion $r(t)$ kuvaajaan.