

Mat-1.1230 Matematiikan peruskurssi S3, syksy 2007

Laskuharjoitus 6A alkuviikolla 42 (15.-17.10.)

Näitä tehtäviä lasketaan vasta harjoituksissa. Tehtäviä voi silmäillä ennen harjoitusta ja kerrata tarvittavaa aihepiiriä kurssimateriaalista.

(Luennot tai Kre9 11.1; Kre8 10.1–2)

1. Millä vakioiden a ja b arvoilla funktiot 1 , x ja $x^2 + ax + b$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan välillä $[-1, 1]$, kun kohtisuoruus määritellään ehdolla

$$f \perp g \Leftrightarrow (f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \, dx = 0?$$

2. Kompleksiarvoisille funktioille edellisen tehtävän tyyppinen integraali ei mittaa kohtisuoruutta oikealla tavalla, koska esimerkiksi välillä $[-\pi, \pi]$ olisi

$$(e^{ix}, e^{ix}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i2x} \, dx = 0 \text{ (tarkista).}$$

Tämän korjaamiseksi kompleksiarvoisille f, g määritellään

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} \, dx$$

(eli jälkimmäisestä funktion arvosta lasketaan liittoluku). Osoita, että tällöin $e^{inx} \perp e^{imx}$, jos $m \neq n$, ja laske (e^{inx}, e^{inx}) kaikilla $n \in \mathbf{Z}$.

3. a) Osoita, että $f(x)g(x)$ on pariton, jos f on pariton ja g parillinen.
b) Määritä funktion $f(x) = \sin^2 x$ Fourier-sarja trigonometristen kaavojen avulla.
4. Olkoon $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 2π -jaksollinen ja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leq 0, \\ 2, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Määritä funktion f Fourier-sarja.

5. Olkoon $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 2π -jaksollinen ja $f(x) = x$, kun $-\pi < x \leq \pi$. Määritä funktion f Fourier-sarja.

1. välikoe tiistaina 16.10. klo 16–19. Koealue lyhyesti: kompleksianalyysi, harjoitukset 1L–5L. Tarkemmin kotisivulla.