

Mat-1.1230 Matematiikan peruskurssi S3, syksy 2007

Laskuharjoitus 5L loppuviikolla 41 (10.-12.10.)

Nämä tehtävät on tarkoitus laskea kotona; ratkaisut käsitellään harjoituksissa.
(Aihepiiri: Kre9 16.4, Kre8 15.4)

1. Laske Fourier-integraali

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{x^2 + 9} dx.$$

Vihje: Integroi $e^{i2z}/(z^2 + 9)$ puoliympyrän reunaa pitkin.

2. Laske Fourier-integraali

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx.$$

Vihje: Kuten edellisessä tehtävässä. Kaari-integraalin häviäminen voidaan olettaa tunnetuksi

Vast: π/e .

3. Johda kaava

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}, \quad n \geq 2.$$

Vihje: Integroi funktio $1/(1 + z^n)$ origokeskisen R -säteisen sektorin reunaa pitkin, kun sektorin keskuskulma on $2\pi/n$. Tämän sisälle jää vain yksi napa $e^{i\pi/n}$ ja lasku on helpompi kuin puoliympyrän tapauksessa.

Kertaustehtäviä

4. Muodosta analyttinen funktio, jonka reaaliosa on $5x - 3y + 2$.
5. Laske parametrisointia käyttämällä

$$\int_C (2z + 1) dz,$$

kun C on paraabelin $y = x^2$ kaari origosta pisteeseen $1 + i$.

6. Päättele residyyjen avulla seuraavien osamurtohajotelmien kertoimet:

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x-1)(x-2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}, \\ \frac{x}{(x-1)(x-2)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Vihje: Toisen asteen termin kerroin ei ole $\text{Res } f(z)$ vaan $\text{Res } [(z - z_0)f(z)]$. Miten tämä yleistyy esim. kolminkertaisille termeille?