

Mat-1.1230 Matematiikan peruskurssi S3, syksy 2007

Laskuharjoitus 4L loppuviikolla 40 (3.-5.10.)

Nämä tehtävät on tarkoitus laskea kotona; ratkaisut käsitellään harjoituksissa.

(Aihepiiri: Kre9 16.1–3, Kre8 15.1–3.)

Huom: Tehtävissä voi käyttää tunnettuja raja-arvoja. Muita raja-arvoja voidaan laskea L'Hôpitalin säännöllä, joka on voimassa myös analyyttisille kompleksifunktioille, koska se seuraa Taylor-sarjoista.

1. Määritä funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$$

Laurent-sarja rengasalueessa $A = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

Vihje: Osamurtohajotelma ja geometrinen sarja.

2. Osoita, että seuraavilla funktioilla on yksinkertainen napa annetussa pisteessä ja laske vastaavat residyt:

a) $\cot z$, $z_0 = 0$;

b) $\tan z$, $z_0 = \pi/2$.

3. Tarkastellaan funktiota

$$f(z) = \frac{\sin z}{z \cos z}.$$

a) Osoita, että piste $z_0 = 0$ on 0-kertainen napa; ts. funktiolla on raja-arvo pisteessä $z_0 = 0$.

b) Määritä funktion residyt navoissa $z = (2n+1)\pi/2$, kun $n \in \mathbf{Z}$.

4. Päättele suoraan residylaskennan avulla rationaalifunktion $f(z) = \frac{z+3}{(z-2)(z+4)}$ osamurtohajotelma ja laske sen avulla

$$\oint_C f(z) dz,$$

kun C on ympyrä $|z| = 3$ (pos. kiertosuunta).

5. a) Määritä funktion

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{z^2(z-3)^2}$$

navat ja vastaavat residyt.

b) Laske integraalit

$$\oint_C f(z) dz,$$

kun C on ympyrä (i) $|z| = 1$; (ii) $|z-3| = 1$ (pos. kiertosuunnat).

6. Kun käyrä C on ympyrä $|z| = 2$, niin residylauseen (ma 1.10. luennolla) mukaan

$$\oint_C \frac{ze^z}{1+z^2} = 2\pi i (\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-i} f(z)),$$

missä f on integroitava funktio. Laske tarvittavat residyt ja ko. integraali.