

Mat-1.1230 Matematiikan peruskurssi S3, syksy 2007

Laskuharjoitus 3L loppuviikolla 39 (26.-28.9.)

Nämä tehtävät on tarkoitus laskea kotona; ratkaisut käsitellään harjoituksissa.

(Aihepiiri: Kre9 14.1–2, 17.1, Kre8 12.5, 13.1–2.)

1. Määritä konformikuvauksen $f: D \rightarrow D'$, $f(z) = ie^z$, kuvajoukko $D' = fD$ ja vastaavan käänteiskuvauksen lauseke, kun $D = [0, 1] \times [0, \pi/2] \subset \mathbf{C}$.
Vihje: Lienee helpointa edetä vaiheittain: ensin e^z ja sitten i :llä kertominen.
Katso myös Apiola: s. 20.
2. Olkoon $f = u + iv: D \rightarrow D'$ konformikuvaus ja $w: D' \rightarrow \mathbf{R}$ harmoninen. Määritellään näiden avulla $W = w \circ f: D \rightarrow \mathbf{R}$, jolle siis $W(x, y) = w(u(x, y), v(x, y))$. Luentomonisteen s. 16 on laskettu W_{xx} . Laske samalla periaatteella W_{yy} ja totea, että W on harmoninen alueessa D .
3. Laske $\oint_C (a_m z^{-m} + \dots + a_{-1} z^{-1} + a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n) dz$, kun kertoimet $a_k \in \mathbf{C}$ ja C on yksikköympyrä $|z| = 1$.
4. a) Määritä

$$\oint_C \sqrt{z} dz,$$

kun käyrä C on ympyrä $|z| = 4$ positiiviseen suuntaan kierrettynä (alku = loppu = -4) ja $\sqrt{z}$ tarkoittaa pääarvoa $\sqrt{re^{i\varphi}} = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$, missä $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

b) Miksei tulos ole ristiriidassa Cauchyn integraalilauseen kanssa?

5. Laske integraali $\int_C z \bar{z} dz$, kun
 - a) käyrä C on pisteet 0 ja $1 + 2i$ yhdistävä jana.
 - b) käyrä C kulkee pisteestä 0 pisteeseen $1 + 2i$ "suorakulmaisesti" eli ensin vaakasuoraan pisteeseen 2 ja sitten pystysuoraan ylös. Vertaa tuloksia.
Vihje: b-kohdassa käyrä määritellään kahdessa osassa, joten integraalikin lasketaan kahdessa osassa.
6. Määritä funktion $f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$ osamurtohajotelma ja päättelee tuloksen avulla integraalin

$$\oint_C \frac{z}{z^2 - 1} dz$$

arvo, kun käyrä C

- a) on ympyrä $|z| = 2$ (pos. kiertosuunta)
- b) on ympyrä $|z - 1| = 1$ (pos. kiertosuunta)
- c) on ∞ merkkiä muistuttava silmukka, ja piste 1 jää oikean, piste -1 vasemman silmukan sisälle (vaikuttaako kiertosuunta tulokseen?).

Huom: Tehtävässä ei tarvitse kirjoittaa parametrisointeja tms. vaan vastaukset saadaan muuntamalla käyrät ympyröiksi ja soveltamalla kaavaa

$$\oint_C (z - z_0)^{-1} dz = \begin{cases} \pm 2\pi i, \\ 0. \end{cases}$$