

Mat-1.1230 Matematiikan peruskurssi S3, syksy 2007

Laskuharjoitus 3A alkuviikolla 39 (24.-25.9.)

Näitä tehtäviä lasketaan vasta harjoituksissa. Tehtäviä voi silmäillä ennen harjoitusta ja kerrata tarvittavaa aihepiiriä kurssimateriaalista.

(luennot tai Kre9 14.1–2, 17.1; Kre8 12.5, 13.1–2)

1. Mille alueelle funktio $f(z) = z^3$ kuvaa alueen $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$?
Mikä on vastaavan käänteiskuvauksen lauseke?
Vihje: Parametrisoi reunan osat ja tutki niiden kuvautumista.
2. Konformikuvaus $f = u + iv: D \rightarrow D'$ voidaan tulkita myös reaalisena muuttujanvaihtona $F: D \rightarrow D', F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.
a) Totea C-R-yhtälöiden avulla, että muunnoksen F Jacobin determinantille pätee

$$J_F = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = |f'(z)|^2.$$

Mikä yhteys tuloksella on ominaisuuden "konformikuvauksen paikallinen venytys on kaikissa suunnissa $|f'(z)|$ " kanssa?

b) Konformikuvaus $f(z) = (2 + 3i)z + 5$ kuvaa yksikköneliön $[0, 1] \times [0, 1]$ eräälle toiselle neliölle. Määritä kuvaneliön pinta-ala (tietysti a-kohdan avulla!).

3. Stereograafinen projektio p on konformikuvaus (= säilyttää kulmat) kompleksitasosta avaruuden yksikköpallon pinnalle, joka määrittyy seuraavalla tavalla: Pallon pohjoisnapa N on avaruuden pisteessä $(0, 0, 1)$ ja etelänapa pisteessä $(0, 0, -1)$. Piste $x + iy = (x, y, 0)$ kuvautuu janan $[N, (x, y, 0)]$ suuntaisen säteen ja pallon pinnan leikkauspisteeseen ($\neq N$).
a) Tutki origon ja yksikköympyrän pisteiden kuvautumista.
b) Muodosta ko. säteen parametrisointi ja johda sen avulla kaava

$$p(x_0 + iy_0) = (tx_0, ty_0, 1 - t),$$

missä $t = 2/(1 + x_0^2 + y_0^2)$.

4. Laske integraali

$$\int_C \frac{1}{1+z} dz,$$

kun käyrä C on pisteet 0 ja i yhdistävä jana.

5. Laske

$$\oint_C \frac{dz}{\bar{z}},$$

kun C on yksikköympyrä $|z| = 1$.