

Mat-1.1230 Matematiikan peruskurssi S3, syksy 2007

Laskuharjoitus 2L loppuviikolla 38 (19.-21.9.)

Nämä tehtävät on tarkoitus laskea kotona; ratkaisut käsitellään harjoituksissa. (Aihepiiri: Kre9 luku 13, Kre8 luku 12.)

1. Tehtävän 4/2A tapaan kannattaa määritellä

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \dots = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$

kun $z = x + iy$. Osoita C-R-yhtälöiden avulla, että $\cos$ -funktio on analyyttinen ja että tuttu derivoimiskaava pätee.

2. Ovatko funktiot

a) $u(x, y) = x^2y - y^2x$,

b) $u(x, y) = xy^3 - yx^3$

harmonisia? Määritä positiivisessa tapauksessa vastaava harmoninen konjugaattifunktio.

3. Muodosta jokin analyyttinen funktio $f = u + iv$, jolle $v(x, y) = x - 2y + 3$. Kirjoita tulos muodossa $f(z) = \text{"kaava"}$ sijoittamalla lopuksi $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2i$.

4. Kompleksifunktion $f = u + iv = U + iV$ reaali- ja imaginaariosat esitetään napakoordinaattien avulla muodossa

$$\begin{cases} U(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ V(r, \theta) = v(r \cos \theta, r \sin \theta). \end{cases}$$

Osoita ketjusäännön avulla, että Cauchy-Riemann-yhtälöiden napakoordinaattimuoto on

$$\begin{cases} U_r = \frac{1}{r} V_\theta \\ V_r = -\frac{1}{r} U_\theta. \end{cases}$$

5. Osoita, että kaavat

$$\begin{cases} U(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta, \\ V(r, \theta) = \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta \end{cases}$$

määrittelevät origon ulkopuolella analyyttisen funktion f (edellisen tehtävän merkinnöillä) ja määritä yksikköympyrän $S = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ kuvajoukko.

6. Määritä yleisin mahdollinen koko tasossa määritelty

a) analyyttinen funktio $f = u + iv$, jolle v on vakio;

b) radiaalinen analyyttinen funktio.

Vihje: Funktio on radiaalinen, jos $U_\theta = V_\theta = 0$ tehtävän 4 merkinnöillä.