

Mat-1.1230 Matematiikan peruskurssi S3, syksy 2007

Laskuharjoitus 2A alkuviikolla 38 (17.-18.9.)

Nämä tehtävät on tarkoitus laskea kotona; ratkaisut käsitellään harjoituksissa. (Aihepiiri: Kre9 luku 13, Kre8 luku 12.)

1. Funktion $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $g(t) = x(t) + iy(t)$, derivaatta määritellään asettamalla $g'(t) = x'(t) + iy'(t)$, kun $t \in \mathbf{R}$. Osoita (Eulerin kaavan avulla), että derivoimissääntö

$$\frac{d}{dt}e^{it} = ie^{it}$$

on voimassa.

2. a) Hahmottele se tasojoukko, jonka pisteille z pätee $|z - 2| = |z + 2i|$.
b) Derivoi funktio $f(z) = (z + 1)/(1 + z^2)$.
3. a) Määritä esityksessä $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ esiintyvät funktiot u ja v , kun $f(z) = z^3$.
b) Osoita, että u ja v toteuttavat Cauchy-Riemann-yhtälöt.
4. Eulerin kaavan perusteella $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, kun $x \in \mathbf{R}$. Tämän perusteella määritellään

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

kaikilla $z \in \mathbf{C}$.

- a) Määritä esityksen $\sin = u + iv$ funktiot u ja v .
b) Kirjoita tulos hyperbolisten funktioiden $\sinh$ ja $\cosh$ avulla ja vertaa tulosta $\sin$ -funktion yhteenlaskukaavaan.
Vihje: Miten $\sin(iy)$ ja $\cos(iy)$ liittyvät hyperbolisiin funktioihin, kun $y \in \mathbf{R}$?
5. Osoita, että Cauchy-Riemann-yhtälöt toteutuvat alueessa $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ funktiolle
- $$\log z = \ln |z| + i \arg z,$$
- kun $\arg z \in (-\pi, \pi]$ tulkitaan argumentin päähaaraksi.
6. Olkoon $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = z\bar{z}$.
a) Tutki funktion f derivoituvuutta erotusosamäärän avulla.
Vihje: Tutki reaalisia/imaginaarisia muutoksia kuten funktion $f(z) = \bar{z}$ tapauksessa.
b) Missä tason pisteissä Cauchy-Riemann-yhtälöt toteutuvat?