Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
3. välikoe 16.12.1999

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Aut, Inf, Tfy, Tik, Tuo, Säh, Kon, Kem, Mak, Puu, Ark, Maa, Mar, Ryk);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Määritä integraalifunktio $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$.

(b) Laske integraalin $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$ likiarvo Simpsonin menetelmällä kun integroimisväli jaetaan neljään yhtä pitkään osaväliin.

Ratkaisu: (a) Selvästikin $\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2} = 1 - \frac{5x+1}{x^2+3x+2}$ ja jos $x^2+3x+2=0$ niin $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9-8}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$ joten $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$. Nyt voidaan kirjoittaa

$$\frac{5x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2},$$

ja silloin nähdään, että

$$A = \frac{-5+1}{1} = -4,$$
$$B = \frac{-10+1}{-1} = 9,$$

joten

$$\int \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{5x+1}{(x+1)(x+2)}\right)\,\mathrm{d}x = x + \int \frac{4}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{9}{x+2}\,\mathrm{d}x$$
$$= x + 4\ln(|x+1|) - 9\ln(|x+2|) + C.$$

(b) Koska väli $[0,2]$ jaetaan neljään osaväliin, niin $h = \frac{2}{4} = 0.5$, $x_j = j/2$ ja

$$S_4 = \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\Big)$$
$$= \frac{0.5}{3}\left(\frac{1}{2} + 4\frac{\frac{1}{4}-1+1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+2} + 2\frac{1-2+1}{1+3+1} + 4\frac{\frac{9}{4}-3+1}{\frac{9}{4}+\frac{9}{2}+2} + \frac{4-4+1}{4+6+2}\right) \approx 0.1607142857$$

2.

(a) Laske funktion f Fouriermuunnos $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\omega \in \mathbb{R}$, kun $f(t) = 1$ kun $|t| \le T$ ja $f(t) = 0$ kun $|t| > T$.

(b) Onko käyrän $\{\,(x(t), y(t)) \mid t \in (0,1)\,\}$, $x(t) = t\cos(\frac{1}{t})$, $y(t) = t\sin(\frac{1}{t})$, pituus äärellinen?

Ratkaisu: (a) Funktion f määritelmästä seuraa, että kun $\omega \neq 0$ niin

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big/_{-T}^{T} \frac{1}{-\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega T} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right) = 2\frac{\sin(\omega T)}{\omega}.\end{aligned}$$

Jos $\omega = 0$ niin

$$\hat{f}(0) = \int_{-T}^{T} 1\,\mathrm{d}t = 2T.$$

(b) Käyrän pituus on $\int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$ ja koska $x'(t) = \cos(\frac{1}{t}) + \frac{1}{t}\sin(\frac{1}{t})$ ja $y'(t) = \sin(\frac{1}{t}) - \frac{1}{t}\cos(\frac{1}{t})$ niin saadaan

$$\begin{aligned}x'(t)^2 + y'(t)^2 &= \cos(\tfrac{1}{t})^2 + \tfrac{2}{t}\cos(\tfrac{1}{t})\sin(\tfrac{1}{t}) + \tfrac{1}{t^2}\sin(\tfrac{1}{t})^2 \\ &\quad + \sin(\tfrac{1}{t})^2 - \tfrac{2}{t}\cos(\tfrac{1}{t})\sin(\tfrac{1}{t}) + \tfrac{1}{t^2}\cos(\tfrac{1}{t})^2 = 1 + \frac{1}{t^2}.\end{aligned}$$

Koska $\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \geq \sqrt{\frac{1}{t^2}} = \frac{1}{t}$ (kun $t > 0$) ja $\int_0^1 t^\alpha\,\mathrm{d}t = \infty$ kun $\alpha \leq -1$, niin nähdään että integraali $\int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$ ei suppene eli käyrän pituus on ääretön.

---

3. Ympyrämuotoisen, äärettömän pitkän putken halkaisija on 2 (pituusyksikköä) ja putken akseli menee pisteen $(-7, 2, 0)$ kautta ja on kohtisuorassa tasoa $4x+y-z = 5$ vastaan. Toisen, myös ympyrämuotoisen, putken akseli menee pisteiden $(3, 2, 1)$ ja $(3, 3, 2)$ kautta. Määritä putkien akselien yhtälöt. Miten iso jälkimmäisen putken halkaisija voi olla jos putket eivät kosketa toisiaan?

Ratkaisu: Ensimmäisen akselin suuntavektori on tason normaali eli $4\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$. Koska tämä akseli menee pisteen $(-7, 2, 0)$ kautta, niin sen yhtälö on

$$\frac{x+7}{4} = y - 2 = -z.$$

Toisen akselin suuntavektori on $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} - (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Tämän akselin yhtälö on silloin

$$\frac{x-3}{0} = y - 2 = z - 1, \text{ eli } x = 3 \text{ ja } y = z + 1.$$

Näiden suorien välinen etäisyys saadaan kaavasta $|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\cdot(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|/|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|$ missä $\mathbf{v}_j$, $j = 1, 2$ ovat suuntavektorit ja $\mathbf{r}_1 = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ja $\mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ovat pisteitä suorilla. Näin ollen

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$

ja

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -10\mathbf{i} - \mathbf{k},$$

jolloin etäisyydeksi tulee

$$\frac{|-20-4|}{\sqrt{4+16+16}} = 4.$$

Jälkimmäisen putken halkaisijan pitää olla pienempi kuin $2(4-2/2)=6$.

---

4. Määritä Newtonin interpolointikaavalla, eli käyttäen jaettuja erotuksia, kolmannen asteen polynomi p, jolle pätee $p(0)=1$, $p(1)=0$, $p(2)=5$ ja $p(4)=57$. (Jos et osaa käytää Newtonin interpolintikaavaa, yritä laskea tätä polynomia jollain toisella tavalla.) Olkoon f on funktio, jolle pätee $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(2)=5$ ja $f(4)=57$. Määritä yläraja "virheelle" $|f(1.5)-p(1.5)|$ kun tiedetään, että $|f''(x)|\leq 28$, kun $0\leq x\leq 4$, $|f'''(x)|\leq 6$, kun $1\leq x\leq 2$, $|f'''(x)|\leq 11$, kun $0\leq x\leq 4$, ja $|f^{(4)}(x)|\leq 4$, kun $0\leq x\leq 4$.

Ratkaisu: Jaetut erotukset lasketaan seuraavan kaavion avulla:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_j]$	$f[x_i,x_j,x_k]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
0	1			
		-1		
1	0		3	
		5		1
2	5		7	
		26		
4	57			

Haettava polynomi on

$$\begin{aligned}p(x) = f[x_0] + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \\ + (x-x-0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\ = 1 - x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) = 1-2x+x^3.\end{aligned}$$

Interpoloinnin virhekaavan mukaan

$$f(x)-p(x) = \frac{f^{(4)}(t)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),$$

missä $\min\{x,x_0,x_1,x_2,x_3\}\leq t\leq \max\{x,x_0,x_1,x_2,x_3\}$. Näin ollen saadaan virheelle yläraja

$$|f(1.5)-p(1.5)| \leq \frac{4}{24}\cdot 1.5\cdot 0.5\cdot 0.5\cdot 2.5 = 0.15625.$$
