Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
2. välikoe 15.11.1999

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Aut, Inf, Tfy, Tik, Tuo, Säh, Kon, Kem, Mak, Puu, Ark, Maa, Mar, Ryk);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Määritä raja-arvo $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin(x))-1}{\ln(1+2x^2)}$, mikäli se on olemassa.

(b) Määritä funktion $\sin(\ln(1+x))$ astetta 3 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x=0$.

Ratkaisu: (a) Sijoittamalla $x=0$ saadaan $\frac{0}{0}$ joten yritetään l'Hopitalin säännöllä, eli yritetään laskea

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sin(x))\cos(x)}{\frac{4x}{1+2x^2}}.$$

Jos pystyttäisiin osoittamaan, että $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))}{x}=L$, niin

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin(x))-1}{\ln(1+2x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sin(x))\cos(x)}{\frac{4x}{1+x^2}}=L\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{\frac{4}{1+2x^2}}=L\frac{-1}{4}=-\frac{L}{4}.$$

Jos sijoitetaan $x=0$ lausekkeeseen $\frac{\sin(\sin(x))}{x}$ saadaan taas $\frac{0}{0}$ joten käytetään taas l'Hopitalin sääntöä ja lasketaan

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin(x))\cos(x)}{1}=1,$$

joten $L=1$ ja

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin(x))-1}{\ln(1+2x^2)}=-\frac{1}{4}.$$

(b) Jos merkitään $f(x)=\sin(\ln(1+x))$ niin $f(0)=0$ ja

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\cos(\ln(1+x))\frac{1}{1+x},\quad f'(0)=1,\\
f''(x)&=-\sin(\ln(1+x))\frac{1}{(1+x)^2}-\cos(\ln(1+x))\frac{1}{(1+x)^2},\quad f'(0)=-1,\\
f'''(x)&=(-\cos(\ln(1+x))+\sin(\ln(1+x)))\frac{1}{(1+x)^3}\\
&\qquad+2(\sin(\ln(1+x))+\cos(\ln(1+x)))\frac{1}{(1+x)^3},\quad f'''(0)=-1+2=1.
\end{aligned}$$

Nyt Taylorin polynomiksi saadaan $T_3(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$.

Toisella tavalla: Koska $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)$ ja $\sin(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + O(t^5)$ niin

$$\sin(\ln(1+x)) = \ln(1+x) - \frac{1}{6}(\ln(1+x))^3 + O((\ln(1+x))^5)$$
$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4) - \frac{1}{6}(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4))^3 + O((x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4))^5)$$
$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4).$$

Koska Taylorin polynomi on yksikäsitteinen, niin nähdään, että $T_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$.

---

2. Olkoon $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva funktio. Onko funktio $f(x) = e^{g(x)}$, $x \in (a,b)$ konveksi ("concave up") välillä (a,b) jos g on konveksi välillä (a,b)? Entä jos f on konveksi, onko myös g silloin konveksi? Perustele!

Ratkaisu: Jos g on konveksi niin $g''(x) \geq 0$ välillä (a,b). Koska $f(x) = e^{g(x)}$ niin $f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$ ja $f''(x) = g''(x)e^{g(x)} + g'(x)^2 e^{g(x)}$. Nyt $g''(x) \geq 0$, $g'(x)^2 \geq 0$ ja $e^{g(x)} > 0$ joten $f''(x) \geq 0$, eli myös f on konveksi. Jos f on konveksi niin g ei välttämttä ole konveksi, koska $g(x) = \ln(x)$ ei ole konveksi ($g''(x) = -x^{-2} < 0$) välillä $(0,\infty)$ mutta $e^{g(x)} = e^{\ln(x)} = x$ on konveksi tällä välillä.

---

3. Esitä miten Newtonin menetelmällä löydetään yhtälön $x^4 - 10x = -5$ jokin ratkaisu ja laske 3 iteraatiokierrosta alkuarvolla $x_0 = 1$. Miten pitäisi valita alkuarvo x_0, jotta löytyisi jokin toinen ratkaisu?

Ratkaisu: Jos määritellään $f(x) = x^4 - 10x + 5$ niin on löydettävä f:n nollakohta. Newtonin menetelmän mukaisesti lasketaan x_1, x_2, jne. kaavasta

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 10x_n + 5}{4x_n^3 - 10},$$

kunhan x_0 on annettu.

Jos $x_0 = 1$ niin saadaan

$$x_1 = 0.3333333333,$$
$$x_2 = 0.5037593985,$$
$$x_3 = 0.5065845693.$$

Koska $f'(x) = 4x^3 - 10$ niin $f'(x) < 0$ kun $x < \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ ja $f'(x) > 0$ kun $x > \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$. Koska lisäksi $f(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}) \approx -5.17906606$ ja $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty$ niin yhtälöllä on täsmälleen kaksi ratkaisua ja toinen löytyy jos alkuarvoksi valitaan $x_0 > \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \approx 1.357208809$.

4.

(a) Osoita, että $\int_0^1 \sin(\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x \geq \frac{4-2\sqrt{2}}{\pi}$ käyttäen hyväksi epäyhtälöä $\mathrm{e}^t \geq 1+t$ kun $t \in \mathbb{R}$. Määritä (yksinkertaisella tavalla) jokin yläraja tälle integraalille.

(b) Määritä integraali $\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Ratkaisu: (a) Koska $\mathrm{e}^t \geq 1+t$ niin $\mathrm{e}^{-x} \geq 1-x$. Koska $0 \leq 1-x \leq \mathrm{e}^{-x} \leq 1$ kun $0 \leq x \leq 1$ ja sin on ei-vähenevä funktio välillä $[0, \frac{\pi}{4}]$ niin $\sin(\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-x}) \geq \sin(\frac{\pi}{4}(1-x))$ ja saadaan

$$\int_0^1 \sin(\tfrac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \sin(\frac{\pi}{4}(1-x))\,\mathrm{d}x$$
$$= \Big/_0^1 \tfrac{4}{\pi}\cos(\tfrac{\pi}{4}(1-x)) = \tfrac{4}{\pi}(1-\cos(\tfrac{\pi}{4})) = \frac{4-2\sqrt{2}}{\pi}.$$

Koska $0 \leq \mathrm{e}^{-x} \leq 1$ kun $x \geq 0$ niin $\sin(\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-x}) \leq \sin(\frac{\pi}{4})$ ja

$$\int_0^1 \sin(\tfrac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \sin(\tfrac{\pi}{4})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(b) Tehdään ensin sijoitus $x^2 = t$ jolloin $2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $t=0$ kun $x=0$ ja $t=\pi$ kun $x=\sqrt{\pi}$, joten

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

Osittaisintegroinnilla saadaan nyt

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} t\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big/_0^{\pi} t\sin(t) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= 0 - 0 - \frac{1}{2}\Big/_0^{\pi}(-\cos(t)) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Siis, $\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = -1$.
