Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
2. välikoe 15.11.1999

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Aut, Inf, Tfy, Tik, Tuo, Säh, Kon, Kem, Mak, Puu, Ark, Maa, Mar, Ryk);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Määritä raja-arvo $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin(x))-1}{\ln(1+2x^2)}$, mikäli se on olemassa.

(b) Määritä funktion $\sin(\ln(1+x))$ astetta 3 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x=0$.

2. Olkoon $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva funktio. Onko funktio $f(x)=\mathrm{e}^{g(x)}$, $x\in(a,b)$ konveksi ("concave up") välillä (a,b) jos g on konveksi välillä (a,b)? Entä jos f on konveksi, onko myös g silloin konveksi? Perustele!

3. Esitä miten Newtonin menetelmällä löydetään yhtälön $x^4-10x=-5$ jokin ratkaisu ja laske 3 iteraatiokierrosta alkuarvolla $x_0=1$. Miten pitäisi valita alkuarvo x_0, jotta löytyisi jokin toinen ratkaisu?

4.

(a) Osoita, että $\int_0^1 \sin(\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x \geq \frac{4-2\sqrt{2}}{\pi}$ käyttäen hyväksi epäyhtälöä $\mathrm{e}^t\geq 1+t$ kun $t\in\mathbb{R}$. Määritä (yksinkertaisella tavalla) jokin yläraja tälle integraalille.

(b) Määritä integraali $\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$.