Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

1. välikoe 18.10.1999

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ark, Mar, Kem, Tik, Tuo, Tfy, Kon, Maa, Puu, Ryk, Säh, Aut, Mak, Iv);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Olkoon $z_0 = -2-\mathrm{i}$. Määritä z_0:n argumentti. Esitä kompleksiluku $z_0^2/(\overline{z_0}+1)$ muodossa $a+\mathrm{i}b$.

(b) Määritä (muodossa $a+\mathrm{i}b$) funktion $\ln(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})$ kaikki arvot, eli yhtälön $\mathrm{e}^z = -1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ kaikki ratkaisut.

Ratkaisu: (a) Koska $\operatorname{Re} z = -2 < 0$ niin $\arg(z) = \arctan(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z})+\pi = \arctan(\frac{1}{2})+\pi = 0.4636+\pi = 3.6052$. Argumentiksi kelpaa myös mikä tahansa luku $\arctan(\frac{1}{2})+\pi+2n\pi$, (missä n on kokonaisluku), erikoisesti pääarvo -2.6779 joka kuuluu väliin $(-\pi,\pi]$.

Jos $z = -2-\mathrm{i}$ niin

$$\frac{z^2}{\overline{z}+1} = \frac{(-2-i)^2}{-2+\mathrm{i}+1} = \frac{(4+4\mathrm{i}-1)(-1-\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})} = \frac{1-7\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2}-\frac{7}{2}\mathrm{i}.$$

(b) Jos $w = -1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ niin $|w| = \sqrt{1+3} = 2$ ja koska $\operatorname{Re} w < 0$ niin $\arg(w) = \arctan(\sqrt{3})+\pi = \frac{\pi}{3}+\pi = \frac{4\pi}{3}$. Jos $z = x+\mathrm{i}y$ niin $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x$ ja $\arg(\mathrm{e}^z) = y$ joten päätellään, että jos $\mathrm{e}^z = w$ niin $x = \ln(2) \approx 0.6931$ ja $y = \frac{4\pi}{3}+2n\pi$ missa n on kokonaisluku, eli

$$z = \ln(2)+\mathrm{i}\left(\frac{4\pi}{3}+2n\pi\right), \quad n = \dots,-2,-1,0,1,2,\dots.$$

---

2. Millä vakion α arvolla yhtälöryhmällä

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 5x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= -5 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 &= 7(1-\alpha) \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

on äärettömän monta, täsmälleen yksi tai ei yhtään ratkaisua. Määritä ratkaisut kun niitä löytyy. Onko jokin tapaus (∞, 1 tai 0 ratkaisua) poissuljettu jo sen perusteella, että systeemissä on neljä yhtälöä ja kolme tuntematonta? (Perustele!)

Ratkaisu: Muodostetaan kerroinmatriisi ja sovelletaan siihen Gaussin algoritmia:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 & 1 \\ 4 & -2 & -3 & -5 \\ 2 & -1 & -5 & 7-7\alpha \\ -4 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 + 2r_1 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 6-7\alpha \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ r_4 \leftarrow r_4 + r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 6-7\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tästä nähdään, että jos $6 - 7\alpha \neq 0$, eli $\alpha \neq \frac{6}{7}$ niin ratkaisuja ei ole. Jos toisaalta $\alpha = \frac{6}{7}$ niin x_2 voidaan valita vapaasti, esim. $x_2 = s$ ja yhtälöstä $7x_3 = -7$ saadaan $x_3 = -1$. Sijoittamalla x_2 ja x_3 ensimmäiseen yhtälöön $2x_1 - x_2 - 5x_3 = 1$ saadaan $x_1 = \frac{1}{2}(1 + 5(-1) + s) = -2 + \frac{s}{2}$. Yleinen ratkaisu on siis tässä tapauksessa

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Mikään tapaus ei ole poissuljettu sen perusteella, että systeemissä on neljä yhtälöä ja kolme tuntematonta koska esim. yhtälösysteemillä

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ x_2 \qquad &= 1 \\ x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ ja muut tapaukset esiintyvät yllä olevassa esimerkissä.

---

3. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ käänteismatriisi A^{-1} Gaussin algoritmin avulla.

Ratkaisu: Sovelletaan Gaussin algoritmia ja saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 + \frac{4}{3}r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -2 & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ r_3 \leftarrow 3r_3 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \leftarrow r_1 - 3r_3 \\ r_2 \leftarrow r_2 - 4r_3 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 19 & -12 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & 24 & -15 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \; r_2 \leftarrow \tfrac{1}{3}r_2 \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 19 & -12 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \leftarrow r_1 - 2r_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ja nähdään, että $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 8 & -5 & -4 \\ -6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

4.

(a) Määritä matriisin $\begin{bmatrix} 73 & 105 \\ -50 & -72 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit.

(b) Oletetaan, että A ja B ovat $n \times n$-matriiseja ja A:lla on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria, jotka ovat myös B:n ominaisvektoreita. Osoita, että $AB = BA$

Ratkaisu: (a) Karakteristinen yhtälö $\det(A - \lambda I) = 0$ on tässä tapauksessa

$$\det\left(\begin{bmatrix} 73-\lambda & 105 \\ -50 & -72-\lambda \end{bmatrix}\right) = (73-\lambda)(-72-\lambda) - 105(-50) = \lambda^2 - \lambda - 5256 + 5250 = 0,$$

josta seuraa, että

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+4\cdot 6}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 3, \\ -2. \end{cases}$$

Ominaisarvot ovat siis $\lambda_1 = 3$ ja $\lambda_2 = -2$.

Lasketaan ominaisarvoon λ_1 liittyvä ominaisvektori eli ratkaistaan yhtälösysteemi $(A-3I)X=0$:

$$\begin{bmatrix} 70 & 105 & 0 \\ -50 & -75 & 0 \end{bmatrix} r_2 \leftarrow r_2 + \tfrac{5}{7} r_1 \sim \begin{bmatrix} 70 & 105 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jos $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ niin valitaan $y=1$ ja yhtälöstä $70x+105y=0$ saadaan $x=-\frac{3}{2}$. Ominaisvektoriksi voidaan siis valita $X_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Lasketaan ominaisarvoon λ_2 liittyvä ominaisvektori eli ratkaistaan yhtälösysteemi $(A+2I)X=0$:

$$\begin{bmatrix} 75 & 105 & 0 \\ -50 & -70 & 0 \end{bmatrix} r_2 \leftarrow r_2 + \tfrac{2}{3} r_1 \sim \begin{bmatrix} 70 & 105 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jos $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ niin valitaan $y=1$ ja yhtälöstä $75x+105y=0$ saadaan $x=-\frac{7}{5}$. Ominaisvektoriksi voidaan siis valita $X_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(b) Olkoon matriisi V sellainen, että $V(:,j) = X_j$ missä X_j on A:n (ja myös B:n) ominaisvektori. Koska ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, niin V on säännöllinen eli V^{-1} on olemassa. Silloin $A = VD_AV^{-1}$ ja $B = VD_BV^{-1}$ missä D_A on lävistäjämatriisi, jonka lävistäjällä on A:n ominaisarvot ja D_B on lävistäjämatriisi, jonka lävistäjällä on B:n ominaisarvot. Silloin $AB = VD_AV^{-1}VD_BV^{-1} = VD_AD_BV^{-1}$ ja vastaavasti $BA = VD_BD_AV^{-1}$. Koska lävistäjämatriiseille pätee $D_AD_B = D_BD_A$ (lävistäjllä on D_A:n ja D_B:n lävistäjäalkioiden tulot) nähdään, että $AB = BA$.
