Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
Tentti 20.12.1999

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Aut, Inf, Tfy, Tik, Tuo, Säh, Kon, Kem, Mak, Puu, Ark, Maa, Mar, Ryk);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Olkoon $w = 2 - 2\mathrm{i}$. Hae muodossa $a + \mathrm{i}b$ kaikki yhtälön $z^5 = w$ ratkaisut.

(b) Esitä $(2z)/(z-1)$ muodossa $a + \mathrm{i}b$ kun $z = 0$, $z = \mathrm{i}$, $z = -\mathrm{i}$ ja $z = 2$. Mikä on joukon $\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \}$ kuva kuvauksessa $z \mapsto (2z)/(z-1)$?

Ratkaisu: (a) $|w| = \sqrt{4+4} = 2^{3/2}$ ja $\arg(w) = \arctan((-2)/2) = -\frac{\pi}{4}$. Jos $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ niin $r^5 = 2^{3/2}$ ja $5\theta = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$ joten $r = 2^{3/10}$ ja $\theta = -\frac{\pi}{20} + \frac{2n\pi}{5}$. Eri ratkaisuja saadaan kun $n = 0, 1, 2, 3, 4$, eli siis

$$\begin{aligned}
z_0 &= 2^{\frac{3}{10}}\left(\cos(-\tfrac{\pi}{20}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{\pi}{20})\right) \approx 1.215986982 - 0.1925934177\mathrm{i}\\
z_1 &= 2^{\frac{3}{10}}\left(\cos(-\tfrac{\pi}{20} + \tfrac{2\pi}{5}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{\pi}{20} + \tfrac{2\pi}{5})\right) \approx 0.5589278670 + 1.096957704\mathrm{i}\\
z_2 &= 2^{\frac{3}{10}}\left(\cos(-\tfrac{\pi}{20} + \tfrac{4\pi}{5}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{\pi}{20} + \tfrac{4\pi}{5})\right) \approx -0.8705505628 + 0.8705505628\mathrm{i}\\
z_3 &= 2^{\frac{3}{10}}\left(\cos(-\tfrac{\pi}{20} + \tfrac{6\pi}{5}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{\pi}{20} + \tfrac{6\pi}{5})\right) \approx -1.096957704 - 0.5589278668\mathrm{i}\\
z_4 &= 2^{\frac{3}{10}}\left(\cos(-\tfrac{\pi}{20} + \tfrac{8\pi}{5}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{\pi}{20} + \tfrac{8\pi}{5})\right) \approx 0.1925934178 - 1.215986982\mathrm{i}
\end{aligned}$$

(b) Pätee

$$\begin{aligned}
\frac{2\cdot 0}{0-1} &= -2,\\
\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1} &= \frac{2\mathrm{i}(-\mathrm{i}-1)}{1+1} = 1-\mathrm{i},\\
\frac{2(-\mathrm{i})}{-\mathrm{i}-1} &= \frac{-2\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)}{1+1} = 1+\mathrm{i},\\
\frac{2\cdot 2}{2-1} &= 4.
\end{aligned}$$

Koska pisteet 0, i ja $-\mathrm{i}$ sijaitsevat suoralla $\operatorname{Re} z = 0$ niin nähdään, että tämä suora kuvautuu ympyrälle (tai suoralle) joka menee pisteiden 0, $1-\mathrm{i}$ ja $1+\mathrm{i}$ kautta eli ympyrälle $|z-1| = 1$. Koska piste 2 kuvautuu pisteelle joka on ympyrän ulkopuolella, ja piste 2 kuuluu joukkoon $\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \}$, jonka reuna on suora $\operatorname{Re} z = 0$ niin nähdään että kyseinen joukko kuvautuu joukolle $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z-1| > 1 \}$.

---

2. Määritä vektoreiden $(2, 1, -1, 1)$, $(-2, -1, 3, -3)$, $(6, 3, -7, 7)$ ja $(2, 1, -5, 5)$ virittämän avaruuden dimensio ja määritä jokin tämän avaruuden kanta.

Ratkaisu: Muodostetaan matriisi siten, että annetut vektorit ovat sen vaakarivivektoreina ja sovelletaan siihen Gaussin algoritmia:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & -3 \\ 6 & 3 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow r_2 + r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 3r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_1 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 + 2r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 + 2r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Porrasmuotoisen matriisin nollasta poikkeavat vaakarivivektorit muodostavat kannan eli kantavektoreiksi voidaan valita $(2, 1, -1, 1)$ ja $(0, 0, 2, -2)$. Koska kannassa on kaksi vektoria niin vektoriavaruuden dimensio on 2.

---

3. Selitä, miten Newtonin menetelmää käyttäen voidaan laske luvun $\sqrt[5]{a}$ likiarvo kun $a > 0$ käyttäen ainoastaan yhteen, vähennys-, kerto- ja jakolaskua. Laske tällä tavalla $\sqrt[5]{2}$ (ylimalkaisesti arvioiden) viiden desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu: Merkitään $f(x) = x^5 - a$ jolloin yhtälön $f(x) = 0$ positiivinen ratkaisu on $\sqrt[5]{a}$. Tämä yhtälö ratkaistaan Newtonin menetelmällä laskemalla

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 - a}{5x_n^4} = \frac{4}{5}x_n + \frac{a}{5x_n^4},$$

kun $n = 0, 1, 2, \dots$ ja alkuarvoksi voidaan valita esimerkiksi $x_0 = a$.

Jos nyt $a = 2$ niin saadaan

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= 1.625000000 \\ x_2 &= 1.357364938 \\ x_3 &= 1.203726727 \\ x_4 &= 1.153504805 \\ x_5 &= 1.148738244 \\ x_6 &= 1.148698358 \\ x_7 &= 1.148698355 \\ x_8 &= 1.148698355 \end{aligned}$$

joten päätellään, että $\sqrt[5]{2} \approx 1.14870$.

4.

(a) Määritä integraalifunktio $\int x^2 \ln(x)^2 \, dx$ integroimalla osittain (kaksi kertaa).

(b) Laske integraalin $\int_1^2 x^2 \ln(x)^2 \, dx$ likiarvo Simpsonin menetelmällä kun integroimisväli jaetaan neljään yhtä pitkään osaväliin.

Ratkaisu: (a) Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln(x)^2 \, dx &= \frac{1}{3}x^3 \ln(x)^2 - \int \frac{2}{3}x^3 \ln(x)\frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln(x)^2 - \frac{2}{9}x^3 \ln(x) + \int \frac{2}{9}x^3 \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln(x)^2 - \frac{2}{9}x^3 \ln(x) + \frac{2}{27}x^3 + C.\end{aligned}$$

(b) Jos integroimisväli $[1,2]$ jaetaan neljään yhtä pitkään osaan, niin $h = 1/4 = 0.25$ ja $x_0 = 1$, $x_1 = 1.25$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 1.75$ ja $x_4 = 2$. Koska $f(x) = x^2 \ln(x)^2$ niin Simpsonin säännön mukaan

$$S_4 = \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\Big) \approx 0.5674298164.$$

5.

(a) Määritä (napakoordinaatistossa annetun) käyrän $r = \theta^2$, $0 \le \theta \le \pi$ pituus.

(b) Määritä (napakoordinaatistossa annetun) käyrän $r = \theta$ kaarevuus pisteessä $\theta = \frac{\pi}{2}$. (Kaarevuus saadaan kaavasta $\frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$.)

Ratkaisu: (a) Napakoordinaatistossa annetun käyrän $r = f(\theta)$, $\theta \in [a,b]$, pituus on $\int_a^b \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} \, d\theta$. (Tämä kaava seuraa suoraan yleisemmästä kaavasta $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$ kun $x(t) = f(t)\cos(t)$ ja $y(t) = f(t)\sin(t)\, dt$.) Tässä tapauksessa saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^p i\sqrt{4\theta^2 + \theta^4} \, d\theta &= \int_0^\pi \theta\sqrt{4 + \theta^2} \, d\theta \\ &= \Big/_0^\pi \frac{2}{3}\frac{1}{2}(4+\theta^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(4+\pi^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3} \approx 14.55102222.\end{aligned}$$

(b) Nyt $\mathbf{r}(t) = t\cos(t)\mathbf{i} + t\sin(t)\mathbf{j}$ joten $\mathbf{r}'(t) = (\cos(t) - t\sin(t))\mathbf{i} + (\sin(t) + t\cos(t))\mathbf{j}$ ja $\mathbf{r}''(t) = (-2\sin(t) - t\cos(t))\mathbf{i} + (2\cos(t) - t\sin(t))\mathbf{j}$. Näin ollen

$$\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t) = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(t) - t\sin(t) & \sin(t) + t\cos(t) & 0 \\ -2\sin(t) - t\cos(t) & 2\cos(t) - t\sin(t) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}&= (2\cos(t)^2 - 3t\sin(t)\cos(t) + t^2\sin(t)^2 + 2\sin(t)^2 + 3t\sin(t)\cos(t) + t^2\cos(t)^2)\mathbf{k} \\ &= (2+t^2)\mathbf{k},\end{aligned}$$

ja

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{r}'(t)| \\
&= \sqrt{\cos(t)^2 - 2t\cos(t)\sin(t) + t^2\sin(t)^2 + \sin(t)^2 + 2t\cos(t)\sin(t) + t^2\cos(t)^2} \\
&\qquad = \sqrt{1+t^2}.
\end{aligned}
$$

Kaarevuus kun $t = \frac{\pi}{2}$ on siis

$$\kappa(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{2 + \frac{\pi^2}{4}}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}^3} \approx 0.6919087506.$$