Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
Tentti 2.9.1999

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ark, Mar, Kem, Tik, Tuo, Tfy, Kon, Maa, Puu, Ryk, Säh, Aut, Mak);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Määritä muodossa $a + \mathrm{i}b$ kaikki kompleksiluvut z, joille pätee $\mathrm{e}^z = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{4}\pi}$.

(b) Funktio $f(z) = \frac{z-1}{z+\mathrm{i}}$ kuvaa ympyrät (ja suorat) ympyröille tai suorille. Määritä yksikköympyrän kuva kuvauksessa f eli määritä joukko $\{\, w \mid w = f(z),\ |z| = 1 \,\}$ laskemalla arvot $f(\mathrm{i})$, $f(1)$ ja $f(-1)$ ja päättelemällä mikä ympyrä tai suora kulkee näiden pisteiden kautta.

Ratkaisu: (a) Jos $z = a + \mathrm{i}b$ niin $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{a+\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$. Jos $\mathrm{e}^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^z = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{4}\pi}$ niin $\mathrm{e}^a\frac{1}{2}$ ja $\theta = \frac{1}{4}\pi + \mathrm{i}2n\pi$ missä $n \in \mathbb{Z}$. Näin ollen $a = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$ ja $b = \frac{1}{4}\pi + 2b\pi$ eli $z = -\ln(2) + \mathrm{i}(\frac{1}{4} + 2n)\pi$, missä $n = \ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots$.

(b) Suora lasku antaa

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{i}) &= \frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+\mathrm{i}} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2},\\
f(1) &= \frac{1-1}{1+\mathrm{i}} = 0,\\
f(-1) &= \frac{-1-1}{-1+\mathrm{i}} = \frac{(-2)(-1-\mathrm{i})}{1+1} = 1 + \mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Nähdään, että kaikki pisteet ovat origon ja pisteen $1 + \mathrm{i}$ kautta kulkevalla suoralla, eli tämä suora (jonka yhtälö voidaan myös kirjoittaa muodossa $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$) on yksikköympyrän kuva kuvauksessa f.

2.

(a) Olkoon A $n \times n$-matriisi. Onko matriiseilla A ja A^{T} samat ominaisarvot? Perustele!

(b) Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit.

Ratkaisu: (a) Matriisin A ominaisarvot ovat karakteristisen yhtälön $\det(A-\lambda I) = 0$ ratkaisut. Koska $\det(B^{\mathrm{T}}) = \det(B)$ niin

$$\det(A - \lambda I) = \det\bigl((A - \lambda I)^{\mathrm{T}}\bigr) = \det(A^{\mathrm{T}} - \lambda I^{\mathrm{T}}) = \det(A^{\mathrm{T}} - \lambda I),$$

joten λ on A:n ominaisarvo, eli $\det(A-\lambda I)=0$ täsmälleen slloin kun $\det(A^{\mathrm{T}}-\lambda I)=0$ eli λ on A^{T}:n ominaisarvo. Matriiseilla on siis samat ominaisarvot (mutta ei samat ominaisvektorit).

(b) Karakteristinen yhtälö on

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}-1-\lambda & 0 & 0\\ -2 & -\lambda & -1\\ 2 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}=(-1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)=0,$$

josta suoraan saadaan ratkaisut, eli ominaisarvot

$$\begin{aligned}\lambda_1&=-1,\\ \lambda_2&=0,\\ \lambda_3&=1.\end{aligned}$$

Lasketaan ominaisarvoon $\lambda_1=-1$ liittyvä ominaisvektori eli ratkaistaan systeem $(A+I)V_1=0$:

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-2&1&-1&0\\2&0&2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&1&-1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Jos merkitään $V_1=(\,x\quad y\quad z\,)^{\mathrm{T}}$ niin $-2x+y-z=0$ ja $y+z=0$. Jos valitaan $z=1$ niin $y=-1$ ja $x=-1$ ja saadaan ominaisvektoriksi $V_1=(\,-1\quad -1\quad 1\,)^{\mathrm{T}}$.

Lasketaan ominaisarvoon $\lambda_2=0$ liittyvä ominaisvektori eli ratkaistaan systeem $AV_2=0$:

$$\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\-2&0&-1&0\\2&0&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Jos merkitään $V_2=(\,x\quad y\quad z\,)^{\mathrm{T}}$ niin $x=0$ ja $z=0$ joten voidaan valita $y=1$ ja saadaan ominaisvektoriksi $V_2=(\,0\quad 1\quad 0\,)^{\mathrm{T}}$.

Lasketaan ominaisarvoon $\lambda_3=1$ liittyvä ominaisvektori eli ratkaistaan systeem $(A-I)V_1=0$:

$$\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\-2&-1&-1&0\\2&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Jos merkitään $V_3=(\,x\quad y\quad z\,)^{\mathrm{T}}$ niin $-2x=0$ ja $-y-z=0$. Jos valitaan $z=1$ niin $y=-1$ ja $x=0$ ja saadaan ominaisvektoriksi $V_3=(\,0\quad -1\quad 1\,)^{\mathrm{T}}$.

Ominaisvektoreiksi voidaan siis valita

$$V_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\qquad V_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad V_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

3.

(a) Ratkaise yhtälö $x^2/(\mathrm{e}^x+1)=1$ likimääräisesti Newtonin menetelmällä laskemalla 3 iteraatioaskelta alkuarvolla $x_0=-1$.

(b) Sinikka sai (toisella alkuarvolla) saman yhtälön likimääräiseksi ratkaisuksi `x = -1.1476`. Arvioi, (ja perustele), miten suuri virhe Sinikan ratkaisussa korkeintaan on. Voit käyttää hyväksi arviota, jonka mukaan $f'(x)\le -\frac{1}{2}$ kun $x\le 1$.

Ratkaisu: (a) Merkitään $f(x)=x^2/(\mathrm{e}^x+1)-1$ jolloin on ratkaistava yhtälö $f(x)=0$. Newtonin menetelmän mukaisesti lasketaan

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Nyt $f'(x)=\frac{2x(\mathrm{e}^x+1)-x^2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$ joten

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(x^2-\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x+1)}{2x+(2x-x^2)\mathrm{e}^x},$$

Jos valitaan $x_0=0$ niin saadaan

$$\begin{aligned}x_0&=-1\\x_1&=-1.162137\\x_2&=-1.147872\\x_3&=-1.147758\end{aligned}$$

(b) Jos $\hat{x}=-1.1476$ ja yhtälön tarkka ratkaisu on x_* niin väliarvolauseen nojalla

$$|\hat{x}-x_*|\le\frac{|f(\hat{x})|}{M},$$

missä M on vakio jolle pätee että $|f'(x)|\ge M$ kun x on $\hat{x}$:n ja x_*:n välillä. Koska $|f'(x)|\ge\frac{1}{2}$ kun $x\le -1$ niin nähdään, että jos $x_*\le -1$ niin virheen ylärajaksi saadaan $|\hat{x}-x_*|\le 2|f(\hat{x})|\approx 0.0006252$. Tästä nähdään myös, että voitiin olettaa, että $x_*\le -1$.

4.

(a) Laske integraali $\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$ sijoituksella $\sqrt{x}=t$.

(b) Laske integraalin $\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$ likiarvo Simpsonin säännöllä kun väli $[0,1]$ jaetaan neljään yhtä pitkään osaväliin. Voidaanko odottaa että tulos olisi tarkempi jos ensin tehtäisiin sijoitus $\sqrt{x}=t$. Perustele!

Ratkaisu: (a) Jos $\sqrt{x}=t$ niin $x=t^2$ ja $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$ ja jos $x=0$ niin $t=0$ ja jos $x=1$ niin $t=1$. Näin ollen

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{t}{t+1}2t\,\mathrm{d}t=\int_0^1 2\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)\,\mathrm{d}t\\&=\Big/_0^1\left(t^2-2t+2\ln(|t+1|)\right)=-1+2\ln(2)\approx 0.386294361\end{aligned}$$

(b) Koska väli $[0,1]$ jaetaan neljään yhtä pitkään osaan on $h = 0.25$. Jos merkitään $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ ja $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$ ja $x_4 = 1$ niin Simpsonin säännön nojalla

$$S_4 = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) \approx 0.3765$$

Koska funktion $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ derivaatta kasvaa $\to \infty$ kun $x \downarrow 0$ mutta sijoituksen jälkeen saadaan välillä $[0,1]$ äärettömän monta kertaa derivoituva funktio, niin voidaan odottaa, että tulos olisi tarkempi jos ensin tehtäisiin sijoitus $\sqrt{x} = t$. (Silloin saadaankin Simpsonin säännön avulla approksimaatio 0.3865.)

5.

(a) Määritä Newtonin interpolointikaavalla, eli käyttäen jaettuja erotuksia, toisen asteen polynomi p, jolle pätee $p(-2) = 2$, $p(-1) = 0$ ja $p(0) = 1$. (Jos et tätä osaa, määritä tämä polynomi jollain muulla tavalla.)

(b) Funktiosta f tiedetään, että $|f(t)| \le |t|\sqrt{|t|}$ kun $0 < |t| \le 1$. Mitä voidaan varmuudella sanoa raja-arvoista $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{\sin(t)}$ ja $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t^2}$.

Ratkaisu: (a) Jaetut erotukset lasketaan seuraavan kaavion avulla:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$
-2	2		
		-2	
-1	0		$\frac{3}{2}$
		1	
0	1		

Haettava polynomi on

$$\begin{aligned} p(x) &= f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ &= 2 + (-2)\cdot(x+2) + \tfrac{3}{2}(x+2)(x+1) = 1 + \tfrac{5}{2}x + \tfrac{3}{2}x^2. \end{aligned}$$

(b) Koska $|f(t)| \le |t|\sqrt{|t|}$ niin $|\frac{f(t)}{t}| \le \sqrt{|t|}$ ja koska $\lim_{t\to 0}\sqrt{|t|} = 0$ niin $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t} = 0$. Näin ollen

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{\sin(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}\cdot\frac{1}{\frac{\sin(t)}{t}} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin(t)}{t}} = 0\cdot 1 = 0.$$

Jos $f(t) = t^2$ niin $|f(t)| \le |t|\sqrt{|t|}$ kun $0 < |t| \le 1$ ja $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t^2} = 1$. Toisaalta jos $f(t) = \sin(\frac{1}{t})t^2$ niin $|f(t)| \le |t|\sqrt{|t|}$ kun $0 < |t| \le 1$ mutta $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\sin(\frac{1}{t})$ ei ole olemassa. Näin ollen ei voida varmuudella sanoa yhtään mitään raja-arvosta $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t^2}$.
