Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
Tentti 2.9.1999

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ark, Mar, Kem, Tik, Tuo, Tfy, Kon, Maa, Puu, Ryk, Säh, Aut, Mak);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Määritä muodossa $a + \mathrm{i}b$ kaikki kompleksiluvut z, joille pätee $\mathrm{e}^z = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{4}\pi}$.

(b) Funktio $f(z) = \frac{z-1}{z+\mathrm{i}}$ kuvaa ympyrät (ja suorat) ympyröille tai suorille. Määritä yksikköympyrän kuva kuvauksessa f eli määritä joukko $\{\, w \mid w = f(z),\ |z| = 1 \,\}$ laskemalla arvot $f(\mathrm{i})$, $f(1)$ ja $f(-1)$ ja päättelemällä mikä ympyrä tai suora kulkee näiden pisteiden kautta.

2.

(a) Olkoon A $n \times n$-matriisi. Onko matriiseilla A ja A^{T} samat ominaisarvot? Perustele!

(b) Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit.

3.

(a) Ratkaise yhtälö $x^2/(\mathrm{e}^x + 1) = 1$ likimääräisesti Newtonin menetelmällä laskemalla 3 iteraatioaskelta alkuarvolla $x_0 = -1$.

(b) Sinikka sai (toisella alkuarvolla) saman yhtälön likimääräiseksi ratkaisuksi `x = -1.1476`. Arvioi, (ja perustele), miten suuri virhe Sinikan ratkaisussa korkeintaan on. Voit käyttää hyväksi arviota, jonka mukaan $f'(x) \le -\frac{1}{2}$ kun $x \le 1$.

4.

(a) Laske integraali $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$ sijoituksella $\sqrt{x} = t$.

(b) Laske integraalin $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$ likiarvo Simpsonin säännöllä kun väli $[0, 1]$ jaetaan neljään yhtä pitkään osaväliin. Voidaanko odottaa että tulos olisi tarkempi jos ensin tehtäisiin sijoitus $\sqrt{x} = t$. Perustele!

5.

(a) Määritä Newtonin interpolointikaavalla, eli käyttäen jaettuja erotuksia, toisen asteen polynomi p, jolle pätee $p(-2) = 2$, $p(-1) = 0$ ja $p(0) = 1$. (Jos et tätä osaa, määritä tämä polynomi jollain muulla tavalla.)

(b) Funktiosta f tiedetään, että $|f(t)| \le |t|\sqrt{|t|}$ kun $0 < |t| \le 1$. Mitä voidaan varmuudella sanoa raja-arvoista $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{\sin(t)}$ ja $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t^2}$.