Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

Tentti 17.4.1999

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ark, Mar, Kem, Tik, Tuo, Tfy, Kon, Maa, Puu, Ryk, Säh, Aut, Mak);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Hae (muodossa $a + \mathrm{i}b$) kaikki kompleksiluvut, joille pätee $z^4 = \mathrm{i}$.

(b) Millä kompleksiluvuilla z pätee, että $2 - \dfrac{3}{z}$ on puhtaasti imaginaarinen?

Ratkaisu: Olkoon $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ jolloin $z^4 = r^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\theta}$. Koska $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p}{i}/2}$ saadaan

$$\begin{aligned} r^4 &= 1 \\ 4\theta &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \text{ kokonaisluku.} \end{aligned}$$

Tästä saadaan $r = 1$ ja $\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ ja ratkaisut ovat

$$\begin{aligned} z_0 &= 1\mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi 0}{2}} = \cos(\tfrac{\pi}{8}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{\pi}{8}) \approx 0.9238795325 + 0.3826834325\mathrm{i}, \\ z_1 &= 1\mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi 1}{2}} = \cos(\tfrac{5\pi}{8}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{5\pi}{8}) \approx -0.3826834325 + 0.9238795325\mathrm{i}, \\ z_2 &= 1\mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi 2}{2}} = \cos(\tfrac{9\pi}{8}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{9\pi}{8}) \approx -0.9238795325 - 0.3826834325\mathrm{i}, \\ z_3 &= 1\mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi 3}{2}} = \cos(\tfrac{13\pi}{8}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{13\pi}{8}) \approx 0.3826834325 - 0.9238795325\mathrm{i}. \end{aligned}$$

(b) Kirjoitetaan $z = x + \mathrm{i}y$ missä x ja y ovat reaalisia. Silloin

$$2 - \frac{3}{z} = \frac{2z-3}{z} = \frac{2x-3+2\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}y} = \frac{(2x-3+2\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)}{x^2+y^2} = \frac{2x^2+2y^2-3x+3\mathrm{i}y}{x^2+y^2},$$

ja tästä nähdään, että $2 - \frac{3}{z}$ on puhtaasti imaginaarinen kun $2x^2 + 2y^2 - 3x = 0$ eli $(x - \frac{3}{4})^2 + y^2 = \frac{9}{16}$ eli (x, y) sijaitsee ympyrällä, jonka keskipiste on $(\frac{3}{4}, 0)$ ja säde $\frac{3}{4}$, (mutta $(x, y) \neq (0, 0)$).

---

2. Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ominaisarvot. Hae matriisi V siten, että $V^{-1}AV$ on diagonaalimatriisi. Onko matriisi A kääntyvä? (Perustele, mutta käänteismatriisia ei tarvitse laskea.)

Ratkaisu: Ominaisarvot ovat yhtälön $\det(A-\lambda I)=0$ ratkaisut ja koska

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-3-\lambda & 4 & -4\\ -2 & 3-\lambda & -2\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}\\ &= (1-\lambda)\big((-3-\lambda)(3-\lambda)+8\big)=(1-\lambda)(\lambda^2-1),\end{aligned}$$

niin nähdään, että ominaisarvot ovat 1, 1 ja -1

Lasketaan seuraavaksi ominaisvektorit. Ominaisarvoihin $\lambda=1$ liittyvät ominaisvektorit saadaan yhtälösysteemistä

$$\begin{bmatrix}-4 & 4 & -4 & 0\\ -2 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Tästä nähdään, että ominaisvektoreiksi voidaan valita esimerkiksi

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\quad\text{ja}\quad\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Ominaisarvoon $\lambda=-1$ liittyvä ominaisvektori saadaan yhtälösysteemistä

$$\begin{bmatrix}-2 & 4 & -4 & 0\\ -2 & 4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

ja ominaisvektoriksi voidaan valita esim.

$$\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Jos ominaisvektoreista muodostetaan matriisi

$$V=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

niin

$$V^{-1}AV=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Matriisi A on kääntyvä koska kaikki ominaisarvot ovat $\neq 0$, (tai koska determinantti, joka on ominaisarvojen tulo, ei ole 0).

3.

(a) Laske integraali $\int_1^3 te^{-t}\,dt$ osittaisintegroinnilla.

(b) Laske integraalin $\int_1^3 te^{-t}\,dt$ likiarvo Simpsonin säännöllä kun väli $[1,3]$ jaetaan neljään yhtä pitkään osaväliin.

Ratkaisu: (a)

$$\int_1^3 t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big/_1^3 (-t\mathrm{e}^{-t}) + \int_1^3 \mathrm{e}^{-t}$$
$$= -3\mathrm{e}^{-3} + \mathrm{e}^{-1} - \Big/_1^3 \mathrm{e}-t = -4\mathrm{e}^{-3} + 2\mathrm{e}^{-t} \approx 0.5366106089.$$

(b) Koska väli $[1,3]$ jaetaan neljään yhtä pitkään osaan on $h = 0.5$. Jos merkitään $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ ja $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2.5$ ja $x_4 = 3$ niin Simpsonin säännön nojalla

$$S_4 = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) \approx 0.5363687878.$$

---

4. Käytä Newtonin menetelmää yhtälön $x^4 - 10x + 5 = 0$ pienimmän postiivisen juuren löytämiseksi kolmen desimaalin tarkkuudella (ylimalkaisesti arvioiden). Perustele miksi approksimaatiosi on *pienimmän* positiivisen juuren approksimaatio.

Ratkaisu: Merkitään $f(x) = x^4 - 10x + 5$ jolloin Newtonin menetelmän mukaisesti lasketaan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 10x_n + 5}{4x_n^3 - 10}.$$

Valitaan esimerkiksi $x_0 = 0$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 0.5000000000 \\ x_2 &= 0.5065789474 \\ x_3 &= 0.5065858562 \\ x_4 &= 0.5065858562 \end{aligned}$$

josta päätellään että yhälön juuri on suunnilleen 0.507. Koska $f'(x) = 4x^3 - 10$ niin f':lla on vain yksi (reaalinen) nollakohta, eli $x_0 = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$. Näin ollen f on vähenevä välillä $(-\infty, \sqrt[3]{\frac{5}{2}})$ ja kasvava välillä $(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}, \infty)$ ja näiltä molemmilta väliltä löytyy täsmälleen yksi juuri koska $f(x_0) < 0$ ja $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty$. Koska $0.507 < x_0$ on löydetty pienimmän juuren approksimaatio.

5.

(a) Käyrän yhtälö napakoordinaatistossa on $r = \sin(\theta) - 2\cos(\theta)$. Mikä on tämän käyrän yhtälö xy-koordinaatistossa?

(b) Funktiosta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiedetään että $0 \leq f(t) \leq \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ kun $t \geq 0$. Mitä voidaan varmuudella sanoa raja-arvoista $\lim_{t\to\infty} t^2 f(t)$ ja $\lim_{t\to\infty} \sinh(t)f(t)$? (Perustele!)

Ratkaisu: (a) Koska $x^2 + y^2 = r^2$, $x = r\cos(\theta)$ ja $y = r\sin(\theta)$ saadaan yhtälöstä $r = \sin(\theta) - 2\cos(\theta)$ kun kerrotan r:llä

$$x^2 + y^2 = r^2 = r\sin(\theta) - 2r\cos(\theta) = y - 2x,$$

eli

$$(x+1)^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 = \frac{5}{4},$$

eli kyseessä on ympyrä, jonka keskipiste on $(-1, \frac{1}{2})$ ja säde $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
(b) Koska $\lim_{t\to\infty} s^4 \mathrm{e}^{-s} = 0$ pätee myös $\lim_{t\to\infty} t^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{t}} = 0$ ja koska $0 \le t^2 f(t) \le t^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ seuraa kuristusperiaatteen nojalla, että $\lim_{t\to\infty} t^2 f(t) = 0$. Jos $f(t) = 0$ niin $0 \le f(t) \le \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ ja $\lim_{t\to\infty} \sinh(t) f(t) = 0$. Toisaalta jos $f(t) = \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ niin $0 \le f(t) \le \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ ja $\lim_{t\to\infty} \sinh(t) f(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t-\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t-\sqrt{t}}\right) = +\infty$ joten mitään ei voida varmuudella sanoa raja-arvosta $\lim_{t\to\infty} \sinh(t) f(t)$.
