Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

Tentti 17.4.1999

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ark, Mar, Kem, Tik, Tuo, Tfy, Kon, Maa, Puu, Ryk, Säh, Aut, Mak);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Hae (muodossa $a + \mathrm{i}b$) kaikki kompleksiluvut, joille pätee $z^4 = \mathrm{i}$.

(b) Millä kompleksiluvuilla z pätee, että $2 - \dfrac{3}{z}$ on puhtaasti imaginaarinen?

2. Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ominaisarvot. Hae matriisi V siten, että $V^{-1}AV$ on diagonaalimatriisi. Onko matriisi A kääntyvä? (Perustele, mutta käänteismatriisia ei tarvitse laskea.)

3.

(a) Laske integraali $\int_1^3 t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ osittaisintegroinnilla.

(b) Laske integraalin $\int_1^3 t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ likiarvo Simpsonin säännöllä kun väli $[1, 3]$ jaetaan neljään yhtä pitkään osaväliin.

4. Käytä Newtonin menetelmää yhtälön $x^4 - 10x + 5 = 0$ pienimmän postiivisen juuren löytämiseksi kolmen desimaalin tarkkuudella (ylimalkaisesti arvioiden). Perustele miksi approksimaatiosi on *pienimmän* positiivisen juuren approksimaatio.

5.

(a) Käyrän yhtälö napakoordinaatistossa on $r = \sin(\theta) - 2\cos(\theta)$. Mikä on tämän käyrän yhtälö xy-koordinaatistossa?

(b) Funktiosta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiedetään että $0 \le f(t) \le \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ kun $t \ge 0$. Mitä voidaan varmuudella sanoa raja-arvoista $\lim_{t\to\infty} t^2 f(t)$ ja $\lim_{t\to\infty} \sinh(t) f(t)$? (Perustele!)