Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
Tentti 14.1.1999

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ark, Mar, Kem, Tik, Tuo, Tfy, Kon, Maa, Puu, Ryk, Säh, Aut, Mak);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Kirjoita kompleksiluku $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ muodoissa $a+\mathrm{i}b$ ja $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

(b) Määritä kaikki kompleksiluvut z, joille pätee $\mathrm{e}^z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi}$.

Ratkaisu: (a)

$$\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{4+1} = \frac{1}{5} + \mathrm{i}\frac{3}{5}.$$

Tämän kompleksiluvun itseisarvo eli moduuli on $r = \sqrt{\frac{1}{25}+\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \approx 0{,}6325$. Vastaavasti argumentti eli vaihekulma on $\arctan(\frac{3/5}{1/5}) = \arctan(3) \approx 1{,}2490$. Siis

$$\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{10}}{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan(3)} \approx 0{,}6325\mathrm{e}^{\mathrm{i}1{,}2490}.$$

(b) Olkoon $z = x+\mathrm{i}y$ jolloin $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi}$. Silloin $\mathrm{e}^x = |\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}| = |2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi}| = 2$ joten $x = \ln(2)$. Koska argumenttien erotus on muotoa $2\pi k$ missä k on kokonaisluku, niin $y = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$ ja

$$z = \ln(2) + \mathrm{i}\big(\frac{3}{2}\pi + 2\pi k\big) \quad \text{missä } k \text{ on kokonaisluku.}$$

---

2. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

(a) Sovella Gaussin algoritmia matriisiin A, niin että saadaan porrasmuotoinen matriisi.

(b) Mikä on matriisin A rangi?

(c) Määritä jokin matriisin A vaakavektoreiden virittämän avaruuden kanta.

(d) Määritä jokin matriisin A pystyvektoreiden virittämän avaruuden kanta.

Ratkaisu: (a) Gaussin algoritmilla saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) Koska porrasmuotoisessa matriisissa on 3 nollasta poikeavaa riviä niin sen rangi on 3.
(c) Porrasmuotoisen matriisin nollasta poikkeavat vaakarivit, eli vektorit $(1, 3, 2, 0)$, $(0, 1, 3, 3)$ ja $(0, 0, 0, 4)$ muodostavat matriisin A vaakavektoreiden virittämän avaruuden kannan.
(d) Porrasmuotoisen matriisn sarakkeilla 1, 2 ja 4 on tukialkio, joten matriisin A sarakkeet 1, 2 ja 4 eli vektorit $(1, -2, -1)$, $(3, -5, -2)$ ja $(0, 3, 7)$ muodostavat matriisin A pystyvektoreiden virittämän avaruuden kannan.

---

3. Hae Newtonin menetelmällä yhtälön $x^3 - 2x - 6 = 0$ likimääräinen ratkaisu kolmen desimaalin tarkkuudella (ylimalkaisesti arvioiden).

Ratkaisu: Olkoon $f(x) = x^3 - 2x - 6$. Newtonin menetelmässä lasketaan iteratiivisesti luvut x_1, x_2, x_3 jne. kaavalla

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 6}{3x_n^2 - 2}.$$

Valitaan esimerkiksi $x_0 = 1$ jolloin saadaan

$$\begin{aligned} x_1 &= 8, \\ x_2 &= 5{,}421052631, \\ x_3 &= 3{,}767558101, \\ x_4 &= 2{,}78332849, \\ x_5 &= 2{,}312744447, \\ x_6 &= 2{,}188520934, \\ x_7 &= 2{,}180019733, \\ x_8 &= 2{,}179981072, \\ x_9 &= 2{,}179981072, \end{aligned}$$

josta näkee, että 2,180 on ratkaisun approksimaation kolmen desimaalin tarkkuudella.

4.

(a) Laske integraali $\int_0^\pi x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Laske integraalin $\int_0^\pi x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x$ approksimaatio käyttäen Simpsonin sääntöä ja jakamalla väli $[0, \pi]$ neljään yhtä pitkään osaväliin.

Ratkaisu: (a) Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi x^2(-\cos(x)) + \int_0^\pi 2x\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \pi^2 + \int_0^\pi 2x\sin(x) - \int_0^\pi 2\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= pi^2 + \int_0^\pi 2\cos(x) = \pi^2 - 4 \approx 5{,}869604401.
\end{aligned}$$

(b) Jos väli jaetaan neljään osaväliin saadaan pisteet $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/2$, $x_3 = 3\pi/4$ ja $x_4 = \pi$. Simpsonin menetelmä antaa integraalin approksimaatioksi ($f(x) = x^2\sin(x)$)

$$S_4 = \frac{\pi}{12}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right) = 5{,}85958413.$$

---

5. Taso käy pisteen $(1,1,0)$ ja suoran $x-1 = 2(y+1) = -z+1$ kautta. Määritä tason yhtälö ja pisteen $(1,1,1)$ etäisyys tästä tasosta.

Ratkaisu: Suora $x-1 = 2(y+1) = -z+1$ voidaan tulkita tasojen $x-1 = 2(y+1)$ ja $2(y+1) = -z+1$ leikkaussuorana jolloin sen kautta kulkevat tasot saadaan muodossa

$$x - 1 - 2y - 2 + \lambda(2y + 2 + z - 1) = 0.$$

Valitaan λ niin, että tämä taso käy pisteen $(1,1,0)$ kautta, jolloin $1 - 2 - 3 + \lambda(2 + 0 + 1) = 0$ josta saadaan $\lambda = \frac{4}{3}$. Tason yhtälö on siis

$$x - 2y - 3 + \frac{4}{3}(2y + z + 1) = 0 \quad \text{eli} \quad 3x + 2y + 4z - 5 = 0.$$

Tämän tason etäisyys pistestä $(1,1,1)$ on kaavan mukaan

$$\frac{|3 + 2 + 4 - 5|}{\sqrt{9 + 4 + 16}} = \frac{4}{\sqrt{29}}.$$
