Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
3. välikoe 15.12.1998

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ark, Mar, Kem, Tik, Tuo, Tfy, Kon, Maa, Puu, Ryk, Säh, Aut, Mak);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Kun alue, jonka rajoittavat suora $y = a$, y-akseli ja käyrä $y = a\sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$ pyörähtää y-akselin ympäri, syntyy kappale, jonka tilavuus on $V_1(a)$. Kun alue, jonka rajoittavat suora $x = 1$, x-akseli ja käyrä $y = a\sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$ pyörähtää x-akselin ympäri, syntyy kappale, jonka tilavuus on $V_2(a)$. Millä a:n arvoilla pätee $V_1(a) = V_2(a)$ ja mikä tämä tilavuus silloin on?

Ratkaisu: Kappale, jonka tilavuus on $V_1(a)$, saadaan jos sylinteristä, joka syntyy kun suorien $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ ja $y = a$ rajoittama alue pyörähtää y-akselin ympäri, vähennetään kappale, joka syntyy kun suorien $y = 0$, $x = 1$ ja käyrän $y = a\sqrt{x}$ rajoittama alue pyörähtää y-akselin ympäri. Tilavuus $V_1(a)$ on silloin (olettaen, että $a \ge 0$)

$$V_1(a) = \pi a - 2\pi \int_0^1 ax\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \pi a \left(1 - 2\Big/_0^1 \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{\pi a}{5}.$$

Vastaavasti

$$V_2(a) = \pi \int_0^1 a^2\sqrt{x}^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Jos $V_1(a) = V_2(a)$ niin

$$\frac{\pi a}{5} = \frac{\pi a^2}{2},$$

josta seuraa $a = 0$ tai $a = \frac{2}{5}$. Samanlaisia kappaleita saadaan myös kun $a < 0$ joten myös $a = -\frac{2}{5}$ on ratkaisu. Tilavuus on silloin joko 0 tai $\frac{2\pi}{25}$.

2.

(a) Napakoordinaatistossa erään käyrän yhtälö on $r^2 = 9\sin(2\theta)$. Kirjoita tämän käyrän yhtälö xy-koordinaateilla.

(b) Määritä käyrän $r^2 = 9\sin(2\theta)$, $0 \le \theta \le \pi$ rajoittaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu: (a) Koska $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ ja $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ niin yhtälöksi tulee, kun kerrotaan r^2:lla,

$$r^4 = 18r\sin(\theta)r\cos(\theta) \quad \text{eli} \quad (x^2 + y^2)^2 = 18xy.$$

(b) Koska $\sin(2\theta) < 0$ kun $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ niin tällä välillä olisi $r^2 < 0$ mikä on mahdotonta. On siis tarkasteltava käyrää $r = 3\sqrt{\sin(2\theta)}$ missä $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Välin päätepisteissä $r = 0$ joten tämä käyrä rajoittaa todella tietyn alueen. Sen pinta-ala on

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\sqrt{\sin(2\theta)}\right)^2 \, d\theta = \frac{9}{2}\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\tfrac{1}{2}\cos(2\theta)\right) = \frac{9}{4}(-(-1)+1) = \frac{9}{2}.$$

---

3. Suorien L_1 ja L_2 yhtälöt ovat

$$\frac{x+1}{2} = y = \frac{z-2}{3} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = -t, \\ y = 3 + 2t \\ z = 4. \end{cases}$$

(a) Määritä suorien välinen etäisyys.

(b) Taso T on suorien L_1 ja L_2 suuntainen ja käy pisteen $(0, 1, 2)$ kautta. Määritä T:n yhtälö.

Ratkaisu: (a) Suorien suuntavektorit ovat $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Lisäksi pisteet, joiden paikkavektorit ovat $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ ja $\mathbf{r}_2 = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ sijaitsevat suorilla L_1 ja L_2. Lasketaan ensin

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i} = -6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Lisäksi $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Suorien välinen etäisyys on

$$\frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\cdot(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|} = \frac{|6 + 9 - 10|}{\sqrt{36 + 9 + 25}} = \frac{5}{\sqrt{70}}.$$

(b) Koska taso T on suorien L_1 ja L_2 suuntainen, niin T:n normaaliksi kelpaa $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Koska taso käy pisteen $(0, 1, 2)$ kautta on sen yhtälö

$$-6x - 3(y-1) + 5(z-2) = 0,$$

eli

$$6x + 3y - 5z = -7.$$

4.

(a) Määritä Newtonin interpolointikaavalla, eli käyttäen jaettuja erotuksia, toisen asteen polynomi p, jolle pätee $p(0) = 1$, $p(2) = 1$ ja $p(4) = -7$. (Jos et tätä osaa, määritä tämä polynomi jollain muulla tavalla.)

(b) Funktiosta f tunnetaan arvot $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ ja $f(3)$ ja halutaan laskea $f(1)$:n approksimaatio f_1 käyttäen interpolointifunktiona 3. asteen polynomia. Hae mahdollisimman pieni luku a siten, että voidaan varmuudella sanoa, että $|f(1) - f_1| \leq a$, kun tiedetään, että

$$\begin{aligned} &|f^{(3)}(x)| \leq 2, \quad 0 \leq x \leq 2, &&|f^{(4)}(x)| \leq 5, \quad -1 \leq x \leq 3, \\ &|f^{(5)}(x)| \leq 9, \quad -1 \leq x \leq 3, &&|f^{(4)}(x)| \leq 3, \quad 0 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

Ratkaisu: Jaetut erotukset lasketaan seuraavan kaavion avulla:

$$\begin{array}{cccc} x_i & f[x_i] & f[x_i, x_j] & f[x_i, x_j, x_k] \\ 0 & 1 & & \\ & & 0 & \\ 2 & 1 & & -1 \\ & & -4 & \\ 4 & -7 & & \end{array}$$

Haettava polynomi on

$$\begin{aligned} p(x) &= f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ &= 1 + 0 \cdot x - x(x-2) = 1 + 2x - x^2. \end{aligned}$$

(b) Polynomi-interpoloinnin virhekaavan mukaan

$$f(x) = p(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

missä t on jokin piste väliltä $(\min\{x, x_0, \ldots, x_n\}, \max\{x, x_0, \ldots, x_n\})$. Tässä tapauksessa $n = 3$ ja $f_1 = p(1)$ joten

$$|f(1) - f_1| = \frac{|f^{(4)}(t)|}{4!}|(1-(-1))(1-0)(1-2)(1-3)| = \frac{1}{6}|f^{(4)}(t)|.$$

koska luvusta t tiedetään ainoastaan, että $t \in (-1, 3)$ niin $|f^{(4)}(t)| \leq 5$ ja

$$|f(1) - f_1| \leq \frac{5}{6}.$$