Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
3. välikoe 15.12.1998

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ark, Mar, Kem, Tik, Tuo, Tfy, Kon, Maa, Puu, Ryk, Säh, Aut, Mak);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Kun alue, jonka rajoittavat suora $y = a$, y-akseli ja käyrä $y = a\sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$ pyörähtää y-akselin ympäri, syntyy kappale, jonka tilavuus on $V_1(a)$. Kun alue, jonka rajoittavat suora $x = 1$, x-akseli ja käyrä $y = a\sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$ pyörähtää x-akselin ympäri, syntyy kappale, jonka tilavuus on $V_2(a)$. Millä a:n arvoilla pätee $V_1(a) = V_2(a)$ ja mikä tämä tilavuus silloin on?

2.

(a) Napakoordinaatistossa erään käyrän yhtälö on $r^2 = 9\sin(2\theta)$. Kirjoita tämän käyrän yhtälö xy-koordinaateilla.

(b) Määritä käyrän $r^2 = 9\sin(2\theta)$, $0 \le \theta \le \pi$ rajoittaman alueen pinta-ala.

3. Suorien L_1 ja L_2 yhtälöt ovat

$$\frac{x+1}{2} = y = \frac{z-2}{3} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = -t, \\ y = 3 + 2t \\ z = 4. \end{cases}$$

(a) Määritä suorien välinen etäisyys.

(b) Taso T on suorien L_1 ja L_2 suuntainen ja käy pisteen $(0, 1, 2)$ kautta. Määritä T:n yhtälö.

4.

(a) Määritä Newtonin interpolointikaavalla, eli käyttäen jaettuja erotuksia, toisen asteen polynomi p, jolle pätee $p(0) = 1$, $p(2) = 1$ ja $p(4) = -7$. (Jos et tätä osaa, määritä tämä polynomi jollain muulla tavalla.)

(b) Funktiosta f tunnetaan arvot $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ ja $f(3)$ ja halutaan laskea $f(1)$:n approksimaatio f_1 käyttäen interpolointifunktiona 3. asteen polynomia. Hae mahdollisimman pieni luku a siten, että voidaan varmuudella sanoa, että $|f(1) - f_1| \le a$, kun tiedetään, että

$$|f^{(3)}(x)| \le 2, \quad 0 \le x \le 2, \qquad |f^{(4)}(x)| \le 5, \quad -1 \le x \le 3,$$
$$|f^{(5)}(x)| \le 9, \quad -1 \le x \le 3, \qquad |f^{(4)}(x)| \le 3, \quad 0 \le x \le 2.$$