Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
2. välikoe 16.11.1998

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ark, Mar, Kem, Tik, Tuo, Tfy, Kon, Maa, Puu, Ryk, Säh, Aut, Mak);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Ratkaise yhtälö $xe^{-x} + e^{-x} = -2$ likimääräisesti Newtonin menetelmällä laskemalla 3 iteraatioaskelta alkuarvolla $x_0 = -1$.

(b) Liisa sai (toisella alkuarvolla) saman yhtälön likimääräiseksi ratkaisuksi `x = -1.4633`. Arvioi, (ja perustele), miten suuri virhe Liisan ratkaisussa korkeintaan on.

Ratkaisu: (a) Olkoon $f(x) = xe^{-x} + e^{-x} + 2$ joten on ratkaistava yhtälö $f(x) = 0$. Newtonin menetelmän mukaan $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Tässä tapauksessa $f'(x) = -xe^{-x}$ joten iteraatiokaavaksi tulee

$$x_{n+1} = x_n + 1 + \frac{1}{x_n} + 2\frac{e^{x_n}}{x_n}.$$

Jos $x_0 = -1$ niin saadaan

$$\begin{aligned} x_1 &= -1{,}7358, \\ x_2 &= -1{,}5150, \\ x_3 &= -1{,}4652. \end{aligned}$$

(b) Jos $x_L = -1{,}4633$ niin $f(x_L) = -0.0015$ Arvataan, että yhtälön tarkka ratkaisu x_∞ toteuttaa ehdon $x_\infty \leq -1$ (samoin kun $x_L \leq -1$). (Jos käyttää tulosta $f(-1) = 2 > 0$ ja Bolzanon väliarvolausetta, niin ei tarvitse arvatakaan.) Koska $f'(x) = -xe^{-x}$ niin $|f'(x)| \geq e$ kun $x \leq -1$ ja virhearvioksi saadaan (väliarvolauseen nojalla) $|x_L - x_\infty| \leq \frac{|f(x_L)|}{e} \approx 5{,}6857 \cdot 10^{-5}$. Tästä nähdään, että sekä $x_L \leq -1$ että $x_\infty \leq -1$ joten virhearvio on pätevä.

---

2. Olkoon $f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x}$, $-\infty < x < \infty$.

(a) Millä välillä f on konveksi ("alaspäin kupera", "concave up")?

(b) Onko funktiolla f käänteisfunktio (kun f:n määrittelyjoukko on $(-\infty, \infty)$)? Jos on, mikä on käänteisfunktion määrittelyjoukko? Perustele!

(c) Määritä f:n astetta 3 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x = 0$.

Ratkaisu: (a) Pätee $f'(x) = -xe^{-x} - e^{-x}$ ja $f''(x) = xe^{-x}$, josta nähdään, että $f''(x) \geq 0$ täsmälleen silloin kun $x \geq 0$. Funktio f on siis konveksi välillä $[0, \infty)$.
(b) Koska $f'(x) = e^{-x}(-x-1)$ niin nähdään, että f' vaihtaa merkkiään, eikä siis f ole aidosti kasvava tai aidosti vähenevä välillä $(-\infty, \infty)$ ja (koska f on jatkuva niin)

tästä seuraa, ettei f:llä ole käänteisfunktiota (koska on olemassa pisteitä $x_1 \neq x_2$ siten, että $f(x_1) = f(x_2)$).
(c) Nyt $f^{(3)}(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$ joten f:n astetta 3 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x = 0$ on

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(0)x^3 = 2 - x + \frac{1}{6}x^3.$$

---

3. Oletetaan, että $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$. Kun Katri ja Kaija ratkaisivat erään tehtävän niin Katri sai ratkaisuksi $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$ ja Kaija sai ratkaisuksi $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{d}t$.

(a) Suppeneeko integraali $\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{d}t$? Perustele!

(b) Oletetaan, että Katri laski oikein. Saiko Kaija myös oikean vastauksen? Perustele! (Sijoitus $t = \frac{s}{s+1}$ on hyödyllinen!)

Ratkaisu: (a) Suppenemisongelmia saattaa esiintyä välin $(0, \infty)$ päätepisteissä. Jaetaan integraali kahteen osaan:

$$\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{d}t.$$

Koska α ja $\beta > 0$ niin $(1+t)^{-\alpha-\beta} \leq 1$ joten $(0 \leq)\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} \leq t^{\alpha-1}$ ja ensimmäinen integraali suppenee (majoranttiperiaatteen nojalla) koska

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,$$

suppenee koska $\alpha - 1 > -1$. Pätee tietenkin myös $(1+t)^{-\alpha-\beta} \leq t^{-\alpha-\beta}$ joten $(0 \leq)\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} \leq t^{\alpha-1-\alpha-\beta} = t^{-\beta-1}$ ja toinen integraali suppenee (majoranttiperiaatteen nojalla) koska

$$\int_1^\infty t^{-\beta-1}\,\mathrm{d}t,$$

suppenee koska $-\beta - 1 < -1$.
(b) Tehdään sijoitus $t = \frac{s}{s+1}$ integraalissa $\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$. Silloin $\mathrm{d}t = \frac{1}{(1+s)^2}\mathrm{d}s$ ja kun $t = 0$ niin $s = 0$ ja kun $t \to 1-$ niin $s \to \infty$, joten uudeksi integraaliksi saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\frac{s}{s+1}\right)^{\alpha-1}\left(1 - \frac{s}{s+1}\right)^{\beta-1}\frac{1}{(1+s)^2}\,\mathrm{d}s &= \int_0^\infty \frac{s^{\alpha-1}}{(s+1)^{\alpha-1+\beta-1+2}}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^\infty \frac{s^{\alpha-1}}{(s+1)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{d},\end{aligned}$$

ja koska tämä on Kaijan saama vastaus todetaan, että hänkin sai oikean vastauksen.

4.

(a) Laske $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$ osittaisintegroinnilla.

(b) Laske integraalin $\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$ approksimaatiot T_4 ja S_4 (eli suunnikasmenetelmällä ja Simpsonin menetelmällä kun käytetään 4 osaväliä).

(c) Kaisa laski (saman) integraalin approksimaatiot T_{20} ja S_{20} ja sai virhearvioiksi (standardikaavoista) $2{,}0833 \cdot 10^{-4}$ ja $6{,}9444 \cdot 10^{-8}$. Mitä hän saisi approksimaatioiden T_{60} ja S_{60} virhearvioiksi (samalla tavalla laskien)?

Ratkaisu: (a) Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \Big/_1^2 \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1) - \Big/_1^2 \frac{1}{4}x^2 = 2\ln(2) - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln(2) - \frac{3}{4} \approx 0{,}6363.\end{aligned}$$

(b) Olkoon $f(x) = x\ln(x)$. Nyt

$$T_4 = h\Big(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{1}{2}f(x_4)\Big),$$

missä $x_j = a + j * h$ ja $h = \frac{b-a}{4}$. Tässä tapauksessa $a = 1$ ja $b = 2$ joten $h = \frac{1}{4}$, $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{7}{4}$ ja $x_4 = 2$ joten

$$T_4 \approx 0{,}6399.$$

Simpsonin säännön mukaan

$$S_4 = \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\Big),$$

missä h ja x_j ovat samat kuin edellä joten

$$S_4 \approx 0{,}6363$$

(c) Suunnikasmenetelmän T_n virhearvio on muotoa

$$\frac{C}{n^2},$$

missä C on jokin vakio ja n on osavälien lukumäärä. Jos nyt T_{20}:n virhearvio on $2{,}0833 \cdot 10^{-4}$ niin $C = 20^2 \cdot 2{,}0833 \cdot 10^{-4}$ joten T_{60}:n virhearvio on

$$\frac{20^2 \cdot 2{,}0833 \cdot 10^{-4}}{60^2} \approx 2{,}3148 \cdot 10^{-5}.$$

Vastaavasti Simpsonin menetelmän virhearvio on muotoa

$$\frac{C'}{n^4},$$

missä C' on jokin (toinen) vakio, joten S_{60}:n virhearvio on

$$\frac{20^4 \cdot 6{,}9444 \cdot 10^{-8}}{60^4} \approx 8{,}5733 \cdot 10^{-10}.$$