Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
2. välikoe 16.11.1998

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ark, Mar, Kem, Tik, Tuo, Tfy, Kon, Maa, Puu, Ryk, Säh, Aut, Mak);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Ratkaise yhtälö $x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = -2$ likimääräisesti Newtonin menetelmällä laskemalla 3 iteraatioaskelta alkuarvolla $x_0 = -1$.

(b) Liisa sai (toisella alkuarvolla) saman yhtälön likimääräiseksi ratkaisuksi `x = -1.4633`. Arvioi, (ja perustele), miten suuri virhe Liisan ratkaisussa korkeintaan on.

2. Olkoon $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$, $-\infty < x < \infty$.

(a) Millä välillä f on konveksi ("alaspäin kupera", "concave up")?

(b) Onko funktiolla f käänteisfunktio (kun f:n määrittelyjoukko on $(-\infty, \infty)$)? Jos on, mikä on käänteisfunktion määrittelyjoukko? Perustele!

(c) Määritä f:n astetta 3 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x = 0$.

3. Oletetaan, että $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$. Kun Katri ja Kaija ratkaisivat erään tehtävän niin Katri sai ratkaisuksi $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$ ja Kaija sai ratkaisuksi $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{d}t$.

(a) Suppeneeko integraali $\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{d}t$? Perustele!

(b) Oletetaan, että Katri laski oikein. Saiko Kaija myös oikean vastauksen? Perustele! (Sijoitus $t = \frac{s}{s+1}$ on hyödyllinen!)

4.

(a) Laske $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$ osittaisintegroinnilla.

(b) Laske integraalin $\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$ approksimaatiot T_4 ja S_4 (eli suunnikasmenetelmällä ja Simpsonin menetelmällä kun käytetään 4 osaväliä).

(c) Kaisa laski (saman) integraalin approksimaatiot T_{20} ja S_{20} ja sai virhearvioiksi (standardikaavoista) $2{,}0833 \cdot 10^{-4}$ ja $6{,}9444 \cdot 10^{-8}$. Mitä hän saisi approksimaatioiden T_{60} ja S_{60} virhearvioiksi (samalla tavalla laskien)?