Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
1. välikoe 19.10.1998

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ark, Mar, Kem, Tik, Tuo, Tfy, Kon, Maa, Puu, Ryk, Säh, Aut, Mak);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1. Olkoon $w = -1 - \mathrm{i}$.
(a) Määritä w:n moduuli (eli itseisarvo) ja argumentti (eli vaihekulma).
(b) Määritä kaikki kompleksiluvut z, jotka toteuttavat yhtälön $z^5 = w$.
(c) Määritä kaikki kompleksiluvut z, jotka toteuttavat yhtälön $\mathrm{e}^z = w$.

Ratkaisu: (a) w:n itseisarvo on $|w| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ ja w:n argumentti on $\frac{5\pi}{4}$ koska $w = \sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{5\pi}{4}))$. (Argumentiksi kelpaa myös $-\frac{3\pi}{4}$.)
(b) Jos z:n itseisarvo on r ja argumentti φ niin z^5:n itseisarvo on r^5 ja argumentti 5φ ja jos nyt pätee $z^5 = w$ niin $r^5 = \sqrt{2}$ ja $5\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ missä k on kokonaisluku. Ratkaisuiksi saadaan silloin

$$z = 2^{\frac{1}{10}}\left(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5})\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

eli luvut `0.7579 + 0.7579i, -0.4866 + 0.9550i, -1.0586 - 0.1677i, -0.1677 - 1.0586i, 0.9550 - 0.4866i.`
(c) Jos $z = x + \mathrm{i}y$ missä x ja y ovat reaalilukuja, niin kompleksiluvun e^z itseisarvo on e^x ja argumentti on y. Jos nyt $\mathrm{e}^z = w$ niin $e^x = \sqrt{2}$ ja $y = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ missä k on kokonaisluku. Ratkaisuiksi saadaan silloin

$$z = \ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\,\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

---

2. Millä parametrin α arvoilla yhtälösysteemillä

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 + 2\alpha \\ -3x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= -4 - 6\alpha \\ -x_1 \phantom{{}- 4x_2} + 2x_3 &= -\alpha \end{aligned}$$

on äärettömän monta, täsmälleen yksi tai ei yhtään ratkaisua? Määritä ratkaisu(t) kun ratkaisuja on olemassa.

Ratkaisu: Gaussin menetelmällä saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1+2\alpha \\ -3 & -4 & 4 & -4-6\alpha \\ -1 & 0 & 2 & -\alpha \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1+2\alpha \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -\alpha \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1+2\alpha \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1+\alpha \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1+2\alpha \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2+\alpha \end{bmatrix}$$

Viimeisen rivin mukaan $0 = 2 + \alpha$ joten jos $\alpha \neq -2$ systeemillä ei ole yhtään ratkaisua. Jos $\alpha = -2$ niin viimeinen rivi voidaan jättää pois ja koska 3. sarakkeella ei ole tukialkiota niin nähdään, että löytyy äärettömän monta ratkaisua. Tässä tapauksessa voidaan valita $x_3 = t$ ja koska toisen rivin mukaan $2x_2 + x_3 = -1$ niin $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{t}{2}$. Ensimmäisen rivin mukaan $x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 + 2(-2) = -3$ joten $x_1 = -2 + 2t$. Kun $\alpha = -2$ saadaan siis ratkaisut

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

---

3. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Määritä A:n ominaisarvot ja määritä jokin sellainen matriisi V, että $V^{-1}AV$ on lävistäjamatriisi. Onko mahdollista valita V siten, että se on ortogonaalinen? Onko A kääntyvä, eli onko käänteismatriisi A^{-1} olemassa? (Käänteismatriisia ei tarvitse laskea.) Mikä on A:n rangi? Perustele!

Ratkaisu: Lasketaan ensin A:n ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$(5-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (5-\lambda)^2(2-\lambda) - (2-\lambda) = (2-\lambda)\big((5-\lambda)^2 - 1\big) = 0,$$

josta saadaan $\lambda_1 = 2$ ja $(5-\lambda)^2 = 1$ eli $\lambda_2 = 4$ ja $\lambda_3 = 6$.

Lasketaan seuraavaksi A:n ominaisvektorit. Ominaisarvoon $\lambda_1 = 2$ liittyvä ominaisvektori ratkaistaan systeemistä

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

joten ominaisvktoriksi voidaan valita (jos muuttujat ovat x, y ja z niin valitaan $y = 1$)

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ominaisarvoon $\lambda_2 = 4$ liittyvä ominaisvektori ratkaistaan systeemistä

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

joten ominaisvektoriksi voidaan valita

$$X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ominaisarvoon $\lambda_2 = 6$ liittyvä ominaisvektori ratkaistaan systeemistä

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

joten ominaisvektoriksi voidaan valita

$$X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matriisiksi V voidaan siis valita

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tämä matriisi on kääntyvä ja $V^{-1}AV$ on lävistäjämatriisi, jonka lävistäjällä on ominaisarvot λ_1, λ_2 ja λ_3. Tässä valittu V on ortogonaalinen (eli $V^{\mathrm{T}} = V^{-1}$). Matriisin A determinantti on ominaisarvojen tulo, joten determinantti on $\neq 0$ ja A on silloin kääntyvä. A:n rangi on 3 koska A on kääntyvä.

4.

(a) Määritä $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{|x|}}$. (Laske ensin $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{|x|}}$.)

(b) Funktiosta $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ tiedetään, että $|f(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ kun $x > 0$. Määritä jokin luku $P > 0$ siten, että jos $x > P$ niin $|f(x)| < 10^{-30}$. Osoita, määritelmän nojalla, että $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Ratkaisu: (a) Koska $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ niin

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{\sqrt{|x|}}\right| = \lim_{x\to 0}\sqrt{|x|}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\sqrt{|x|}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 0\cdot 1 = 0.$$

Koska $|\sin t|\leq 1$ kaikilla $t\in\mathbb{R}$ niin

$$\left|\frac{\sin(x)\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{|x|}}\right| \leq \left|\frac{\sin(x)}{\sqrt{|x|}}\right|,$$

joten kuristusperiaatteen ja edellä olevan tuloksen perusteella

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{|x|}} = 0.$$

(b) Jos $x>10^{90}$ niin

$$|f(x)|\leq\frac{1}{\sqrt[3]{x}}<\frac{1}{\sqrt[3]{10^{90}}}=10^{-30},$$

joten luvuksi P kelpaa 10^{90}. Jos $\epsilon>0$ on mielivaltainen, niin valitaan $P=1/\epsilon^3$ ja todetaan että jos $x>P$ niin

$$|f(x)|\leq\frac{1}{\sqrt[3]{x}}<\frac{1}{\sqrt[3]{\epsilon^{-3}}}=\epsilon,$$

joten $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$.