Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
1. välikoe 19.10.1998

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ark, Mar, Kem, Tik, Tuo, Tfy, Kon, Maa, Puu, Ryk, Säh, Aut, Mak);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1. Olkoon $w = -1 - \mathrm{i}$.

(a) Määritä w:n moduuli (eli itseisarvo) ja argumentti (eli vaihekulma).

(b) Määritä kaikki kompleksiluvut z, jotka toteuttavat yhtälön $z^5 = w$.

(c) Määritä kaikki kompleksiluvut z, jotka toteuttavat yhtälön $\mathrm{e}^z = w$.

2. Millä parametrin α arvoilla yhtälösysteemillä

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 + 2\alpha \\ -3x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= -4 - 6\alpha \\ -x_1 \qquad + 2x_3 &= \quad - \alpha \end{aligned}$$

on äärettömän monta, täsmälleen yksi tai ei yhtään ratkaisua? Määritä ratkaisu(t) kun ratkaisuja on olemassa.

3. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Määritä A:n ominaisarvot ja määritä jokin sellainen matriisi V, että $V^{-1}AV$ on lävistäjamatriisi. Onko mahdollista valita V siten, että se on ortogonaalinen? Onko A kääntyvä, eli onko käänteismatriisi A^{-1} olemassa? (Käänteismatriisia ei tarvitse laskea.) Mikä on A:n rangi? Perustele!

4.

(a) Määritä $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{|x|}}$. (Laske ensin $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{|x|}}$.)

(b) Funktiosta $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ tiedetään, että $|f(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ kun $x > 0$. Määritä jokin luku $P > 0$ siten, että jos $x > P$ niin $|f(x)| < 10^{-30}$. Osoita, määritelmän nojalla, että $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.