Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
Tentti 15.12.1998

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ark, Mar, Kem, Tik, Tuo, Tfy, Kon, Maa, Puu, Ryk, Säh, Aut, Mak);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Hae kaikki kompleksiluvut z, joille pätee $z^3 = -27\mathrm{i}$. Esitä luvut muodossa $a + \mathrm{i}b$.

(b) Määritä kaikki kompleksiluvut z, joilla $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1}$ on reaalinen.

Ratkaisu: (a) Koska $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -\mathrm{i}$ niin $-27 = 27\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$ ja koska $27 = 3^3$ niin

$$z = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{6}+\mathrm{i}\frac{2k\pi}{3}} = 3\cos\left(\frac{3\pi+4k\pi}{6}\right) + \mathrm{i}3\sin\left(\frac{3\pi+4k\pi}{6}\right), \quad k = 0,1,2.$$

Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned}
z_0 &= 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\,3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\mathrm{i},\\
z_1 &= 3\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\,3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{3}{2} \approx -2{,}5981 - \mathrm{i}\,\frac{3}{2},\\
z_2 &= 3\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\,3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{3}{2} \approx 2{,}5981 - \mathrm{i}\,\frac{3}{2},
\end{aligned}$$

.

(b) Olkoon $z = x + \mathrm{i}y$. silloin

$$\begin{aligned}
\frac{z+\mathrm{i}}{z+1} = \frac{x+\mathrm{i}(y+1)}{(x+1)+\mathrm{i}y} &= \frac{(x+\mathrm{i}(y+1))((x+1)-\mathrm{i}y)}{(x+1)^2+y^2}\\
&= \frac{x(x+1)+y(y+1)+\mathrm{i}((x+1)(y+1)-xy)}{(x+1)^2+y^2},
\end{aligned}$$

ja tästä nähdään, että $\frac{z+\mathrm{i}}{z+1}$ on reaalinen täsmälleen silloin kun $(x+1)(y+1)-xy) = 0$ (ja $z \neq -1$), eli $x + y + 1 = 0$ ja $(x, y) \neq (-1, 0)$, eli lauseke on reaalinen kun $z = x - \mathrm{i}(x+1)$ missä x on reaalinen ja $\neq -1$.

2. Millä vakion a arvolla yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + ax_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 0 \end{cases}$$

on äärettömän monta ratkaisua? Etsi nämä ratkaisut. Mikä on tässä tapauksessa kerroinmatriisin rangi? Perustele!

Ratkaisu: Gaussin menetelmällä saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & a & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & a-4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6-2a & 0 \end{bmatrix}.$$

Tästä nähdään, että löytyy äärettömän monta ratkaisua täsmälleen silloin kun $6-2a=0$ eli $a=3$. Silloin x_3 voidaan valita vapaasti, esim. $x_3 = t$ jolloin saadaan $x_2 = -2t$ ja $x_1 = -2x_2 - 3x_3 = t$.

Kun $a = 3$ niin matriisin porrasmuodossa on kaksi tukialkiota, joten rangi on 2.

---

3. Hae yhtälön $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ erään ratkaisun approksimaatio laskemalla 3 askelta Newtonin menetelmällä alkuarvolla $x_0 = 1$. Jos x_∞ on f:n nollakohta, josta on lyhin etäisyys näin saatuun approksimaatioon x_3, arvioi mikä tämä etäisyys on käyttäen hyväksi tietoa, että $|f'(x)| \geq 2$ välillä, johon x_∞ ja x_3 kuuluvat.

Ratkaisu: Newtonin menetelmän iteraatiokaava on $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, eli tässä tapauksessa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n^2 + 1}{3x_n^2 - 6x_n}.$$

Koska valitaan $x_0 = 1$, niin saadaan (pyöristettynä)

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}6667 \\ x_2 &= 0{,}6528 \\ x_3 &= 0{,}6527. \end{aligned}$$

Koska $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ niin $f(0{,}6527) \approx 9{,}6152 \cdot 10^{-6}$ ja väliarvolauseen nojalla ($|f(x_3)| = |f(x_i nfty) - f(x_3)| = |f'(y)||x_\infty - x_3|$) saadaan

$$|x_\infty - x_3| \leq \frac{9{,}6152 \cdot 10^{-6}}{2} = 4{,}8076 \cdot 10^{-6}.$$

4.

(a) Napakoordinaatistossa erään käyrän yhtälö on $r^2 = 9\sin(2\theta)$. Kirjoita tämän käyrän yhtälö xy-koordinaateilla.

(b) Määritä käyrän $r^2 = 9\sin(2\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$ rajoittaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu: (a) Koska $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ ja $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ niin yhtälöksi tulee, kun kerrotaan r^2:lla,

$$r^4 = 18r\sin(\theta)r\cos(\theta) \quad \text{eli} \quad (x^2+y^2)^2 = 18xy.$$

(b) Koska $\sin(2\theta) < 0$ kun $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ niin tällä välillä olisi $r^2 < 0$ mikä on mahdotonta. On siis tarkasteltava käyrää $r = 3\sqrt{\sin(2\theta)}$ missä $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Välin päätepisteissä $r = 0$ joten tämä käyrä rajoittaa todella tietyn alueen. Sen pinta-ala on

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\sqrt{\sin(2\theta)}\right)^2 \,\mathrm{d}\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\tfrac{1}{2}\cos(2\theta)\right) = \frac{9}{4}(-(-1)+1) = \frac{9}{2}.$$

---

5. Suorien L_1 ja L_2 yhtälöt ovat

$$\frac{x+1}{2} = y = \frac{z-2}{3} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = -t, \\ y = 3+2t \\ z = 4. \end{cases}$$

(a) Määritä suorien välinen etäisyys.

(b) Taso T on suorien L_1 ja L_2 suuntainen ja käy pisteen $(0,1,2)$ kautta. Määritä T:n yhtälö.

Ratkaisu: (a) Suorien suuntavektorit ovat $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{i}+2\mathbf{j}$. Lisäksi pisteet, joiden paikkavektorit ovat $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{i}+2\mathbf{k}$ ja $\mathbf{r}_2 = 3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ sijaitsevat suorilla L_1 ja L_2. Lasketaan ensin

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i} = -6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

Lisäksi $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Suorien välinen etäisyys on

$$\frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\cdot(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|} = \frac{|6+9-10|}{\sqrt{36+9+25}} = \frac{5}{\sqrt{70}}.$$

(b) Koska taso T on suorien L_1 ja L_2 suuntainen, niin T:n normaaliksi kelpaa $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Koska taso käy pisteen $(0,1,2)$ kautta on sen yhtälö

$$-6x - 3(y-1) + 5(z-2) = 0,$$

eli

$$6x + 3y - 5z = -7.$$