Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

Tentti 15.12.1998

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ark, Mar, Kem, Tik, Tuo, Tfy, Kon, Maa, Puu, Ryk, Säh, Aut, Mak);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Hae kaikki kompleksiluvut z, joille pätee $z^3 = -27\mathrm{i}$. Esitä luvut muodossa $a + \mathrm{i}b$.

(b) Määritä kaikki kompleksiluvut z, joilla $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1}$ on reaalinen.

2. Millä vakion a arvolla yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + ax_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 0 \end{cases}$$

on äärettömän monta ratkaisua? Etsi nämä ratkaisut. Mikä on tässä tapauksessa kerroinmatriisin rangi? Perustele!

3. Hae yhtälön $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ erään ratkaisun approksimaatio laskemalla 3 askelta Newtonin menetelmällä alkuarvolla $x_0 = 1$. Jos x_∞ on f:n nollakohta, josta on lyhin etäisyys näin saatuun approksimaatioon x_3, arvioi mikä tämä etäisyys on käyttäen hyväksi tietoa, että $|f'(x)| \geq 2$ välillä, johon x_∞ ja x_3 kuuluvat.

4.

(a) Napakoordinaatistossa erään käyrän yhtälö on $r^2 = 9\sin(2\theta)$. Kirjoita tämän käyrän yhtälö xy-koordinaateilla.

(b) Määritä käyrän $r^2 = 9\sin(2\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$ rajoittaman alueen pinta-ala.

5. Suorien L_1 ja L_2 yhtälöt ovat

$$\frac{x+1}{2} = y = \frac{z-2}{3} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = -t, \\ y = 3 + 2t \\ z = 4. \end{cases}$$

(a) Määritä suorien välinen etäisyys.

(b) Taso T on suorien L_1 ja L_2 suuntainen ja käy pisteen $(0, 1, 2)$ kautta. Määritä T:n yhtälö.