Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Miekkala/Gripenberg
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
Tentti 3.9.1998

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke, Ko M, Mk, P, R, S, Tf, Ti, Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1. Osoita, että yhtälöryhmällä

$$\begin{aligned} \mathrm{i}x - y + 2z &= 2 \\ 2x \quad + \alpha z &= 2 \\ -x + 2y + 5\mathrm{i}z &= \beta \end{aligned}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu kaikilla α:n arvoilla yhtä lukuunottamatta. Mikä on tämä α:n arvo? Millä β:n arvolla ryhmällä on tällöin ratkaisu ja mikä on kyseinen ratkaisu? (Sekä parametrit α, β että tuntemattomat x, y, z ovat tässä kompleksilukuja.)

Ratkaisu: Gaussin eliminaatiomenetelmällä saadaan

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & \alpha & 2 \\ -1 & 2 & 5\mathrm{i} & \beta \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \\ 0 & -2\mathrm{i} & \alpha + 4\mathrm{i} & 2 + 4\mathrm{i} \\ 0 & 2 + \mathrm{i} & 3\mathrm{i} & \beta - 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \\ 0 & 1 & -2 + \frac{\mathrm{i}\alpha}{2} & -2 + \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 3\mathrm{i} - (2 + \mathrm{i})(-2 + \frac{\alpha\mathrm{i}}{2}) & \beta + 5 - 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Tästä nähdään, että yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu täsmälleen sillon kun $3\mathrm{i} - (2+\mathrm{i})(-2 + \frac{\alpha\mathrm{i}}{2}) \neq 0$, eli $\alpha \neq \frac{12}{5} - \frac{26}{5}\mathrm{i}$. Jos $\alpha = \frac{12}{5} - \frac{26}{5}\mathrm{i}$ niin yhtälöryhmällä on ratkaisuja vain mikäli $\beta + 5 - 2\mathrm{i} = 0$ eli $\beta = -5 + 2\mathrm{i}$. Tässä tapauksessa ratkaisu on

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 + \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} + \frac{13}{5}\mathrm{i} \\ -\frac{3}{5} - \frac{6}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

2.

(a) Laske $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+2}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$.

(b) Jos (a)-kohdan integraali lasketaan Simpsonin säännöllä jakaen integroimisväli neljään yhtäsuureen osaväliin, niin mikä approksimaatio sille saadaan?

Ratkaisu: (a) Haetaan ensin integroitavan funktion osamurtokehitelmä

$$\frac{x+2}{x^+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1},$$

ja ratkaisemalla saadaan $A = 2$ ja $B = -1$. Siis

$$\int_1^3 \frac{x+2}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \Big/_1^3 (2\ln(|x|) - \ln(|x+1|)) = \ln(9/2) \approx 1,5041.$$

(b) Simpsonin säännön mukainen approksimaatio integraalille $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ on

$$S_n = \sum_{j=1}^{n/2} \frac{h}{3}\big(f(x_{2(j-1)}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})\big),$$

missä $h = (b-a)/n$ ja $x_j = a + jh$. Tässä tapauksessa saadaan

$$S_4 = \frac{1}{6}(\frac{1+2}{1+1} + 4\frac{\frac{3}{2}+2}{\frac{9}{4}+\frac{3}{2}} + 2\frac{2+2}{4+4} + 4\frac{\frac{5}{2}+2}{\frac{25}{4}+\frac{5}{2}} + \frac{3+2}{9+3}) \approx 1,5067.$$

---

3. Kirjoita Taylorin kaavan avulla funktion $\ln(1+x)$ kolmannen asteen approksimaatio origon ($a = 0$) ympäristössä. Käytä tulosta luvun $\ln 1,25$ approksimoimiseen ja määritä jäännöstermin avulla pienin väli, jolla $\ln 1,25$ varmasti on.

Ratkaisu: Taylorin kaavan mukaan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(X)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

missä X sijaitsee c:n ja x:n välillä. Jos $f(x) = ln(1+x)$ niin $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ ja $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$ ja kolmannen asteen approksimaatioksi tulee

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Tämän perusteella

$$\ln 1,25 \approx 0,25 - \frac{0,25^2}{2} + \frac{0,25^3}{3} = \frac{43}{192} = 0,22396.$$

Jäännöstermi on

$$R_n = -\frac{1}{4(1+X)^4}0,25^4,$$

ja koska $0 < X < 0,25$ niin $R_n \in (-\frac{1}{1024}, -\frac{1}{2500})$, ja

$$\ln 1,25 \in \left(\frac{43}{192} - \frac{1}{1024}, \frac{43}{192} - \frac{1}{2500}\right) = (0{,}22298,\ 0{,}22356)$$

---

4. Kolmion kärkipisteet ovat $(3, -2, 4)$, $(2, -1, -1)$ ja $(3, 1, 1)$. Mikä on sen tason yhtälö, jolla kolmio sijaitsee? Entä kolmion pinta-ala?

Ratkaisu: Kolmion kahden sivun vektorit ovat $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Vektori $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ on tason normaalin suuntainen ja sen pituus on kaksi kertaa kolmion pinta-ala. Nyt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 12\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

Koska taso kulkee pisteen $(3, -2, 4)$ ja on vektorin $12\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ suuntainen sen yhtälö on

$$12(x - 3) - 3(y + 2) - 3(z - 4) = 0,$$

eli

$$4x - y - z = 10.$$

Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}|12\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}| = \frac{9}{\sqrt{2}}$.

---

5. Käyrä $y = \cosh x$, $x \in [0, 1]$ pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus ja pinta-ala.

Ratkaisu: Pyörähdyskappaleen tilavuus on $\pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x$ eli tässä tapauksessa

$$\begin{aligned}\pi \int_0^1 \cosh^2 x \,\mathrm{d}x &= \pi \int_0^1 \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \pi \Big/_0^1 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 2x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right) = \pi\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^2 + 4 - \mathrm{e}^2\right) = \pi\frac{1}{2} + \pi\frac{1}{4}\sinh 2 \approx 4,4193.\end{aligned}$$

Pyörähdyskappaleen pinta-ala on $2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2} \,\mathrm{d}x$ joten tässä tapauksessa saadaan

$$\begin{aligned}2\pi \int_0^1 \cosh x \sqrt{1 + \sinh^2 x} \,\mathrm{d}x &= 2\pi \int_0^1 \cosh^2 x \,\mathrm{d}x \\ \text{(edellisen nojalla)} &= \pi + \pi\frac{1}{2}\sinh 2 \approx 8,8387.\end{aligned}$$
