Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu
Malinen, Sirviö

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

1. välikoe, Mallivastaukset 17.10.2005

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. (a) Määritä lukujen $z = 2 + 2i$ ja $w = -3 + 3i$ polaariesitykset (siis muoto $re^{i\theta}$) ja laske niiden avulla $\bar{z}\bar{w}$ ja $\bar{z}/\bar{w}$.

   (b) Mille kompleksitason pisteille $z = x + yi \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, on voimassa yhtälö

$$\operatorname{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) = 0?$$

Ratkaisu:

(a) $z = 2 + 2i$ jolloin $|z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ ja $\arg(z) = \arctan(2/2) = \pi/4$, tällöin $z = 2\sqrt{2}e^{\pi i/4}$. Vastaavasti $w = -3 + 3i$, josta $|w| = 3\sqrt{2}$, $\arg(w) = \arctan(3/(-3)) = 3\pi/4$, jolloin $w = e^{3\pi i/4}$.
Nyt saadaan $\bar{z}\bar{w} = -12$ ja $\bar{z}/\bar{w} = 2i/3$.

(b) Luku $z = 0$ ei toteuta yhtälöä

$$\operatorname{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) = 0, \tag{1}$$

joten voidaan olettaa $z \neq 0$. Laskemalla

$$\operatorname{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z^2\bar{z} - \bar{z}}{|z|^2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{(z^2-1)\bar{z}}{|z|^2}\right) = \frac{\operatorname{Re}(z^2-1)\bar{z}}{|z|^2} = 0$$

eli $\operatorname{Re}(z^2 - 1)\bar{z} = 0$. Sijoittamalla $z = x + yi$ saadaan

$$(z^2-1)\bar{z} = (x^2 - y^2 + 2xyi - 1)(x - yi) = (x^2 - y^2)x + 2xy \cdot y - 1 + (\text{hällä väliä})i$$
$$= x(x^2 - y^2 - 1 + 2y^2) + (\text{hällä väliä})i = x(x^2 + y^2 - 1) + (\text{hällä väliä})i.$$

Siis $\operatorname{Re}(z^2 - 1)\bar{z} = 0$, $z \neq 0$ jos ja vain jos $x = 0, y \neq 0$ tai $x^2 + y^2 = 1$. Yhtälön (1) toteuttavat siis ne *nollasta poikkeavat* kompleksiluvut, jotka ovat joko imaginääriakselilla tai yksikköympyrällä.

---

2. a) Määritä vektoreiden $(1, 2, -1, 1)$, $(3, 6, -9, 1)$ ja $(2, 4, -5, 1)$ virittämän vektoriavaruuden dimensio ja määritä jokin kanta tälle vektoriavaruudelle käyttäen Gaussin algoritmia.

   b) Määritä matriisin
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$
   käänteismatriisi Gaussin algoritmin avulla.

   Ratkaisu:

   (a) Muodostetaan matriisi
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -9 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
   missä siis vektorit ovat pystyvektoreina. Gaussin algoritmin avulla saadaan
$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -9 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_1 \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \rightarrow r_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ r_4 \leftarrow r_4 - \frac{1}{3}r_2 \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$
   Porrasmuotoisessa matriisissa tukialkiot ovat sarakkeilla 1 ja 2 jolloin voidaan valita vastaavat vektorit $(1, 2, -1, 1)$ ja $(3, 6, -9, 1)$ kantavektoreiksi.

(b) Gaussin algoritmin avulla saadaan

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow r_2 - \frac{1}{2}r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - \frac{1}{2}r_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 + 2r_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \leftarrow r_1 + 2r_3 \\ r_2 \leftarrow r_2 - r_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \leftarrow \frac{1}{2}r_1 \\ \\ r_3 \leftarrow -2r_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Tästä päätellään, että käänteismatriisi on

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

---

3. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Voidaanko parametrit α, β ja γ valita siten, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua? Mikä on yhtälöryhmän kerroinmatriisin rangi (englanniksi “rank”)?

Ratkaisu:

Gaussittamalla saadaan

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 & \alpha \\ 1 & -1 & -2 & 2 & \beta \\ 3 & 2 & -1 & 1 & \gamma \end{bmatrix} \sim ... \sim \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 & -3 & 3\alpha \\ 0 & -5 & -5 & 5 & 2\beta - \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\gamma - 2\beta - 2\alpha \end{bmatrix}.$$

Tästä nähdään, että kerroinmatriisin rangi on kaksi (tukialkioita 6 ja -5), ja että valitsemalla $\gamma \neq \alpha + \beta$, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

---

4. a) Laske $A^8 = AAAAAAAA$ diagonalisoimalla A, kun $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Olkoon A neliömatriisi, λ matriisin A ominaisarvo ja $\mathbf{x} \neq 0$ sitä vastaava ominaisvektori. Määritellään matriisi $B = A^2 + A$.

Osoita laskemalla, että $\lambda^2 + \lambda$ on B:n ominaisarvo, vastaavan ominaisvektorin ollessa $\mathbf{x}$.

Ratkaisu:

(a) Matriisin $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ karakteristinen yhtälö on $0 = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)$, josta ominaisarvot $\lambda_1 = 3$ ja $\lambda_2 = 2$. Näitä vastaavat ominaisvektorit saadaan yhtälöstä $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$, josta ominaisvektorit $\mathbf{v}_1 = (-2, 1)^T$ ja $\mathbf{v}_2 = (1, -1)^T$. Muodostetaan matriisit $V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ ja $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ eli

$$V = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, V^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pätee $A = V\Lambda V^{-1}$, josta

$$A^8 = V\Lambda^8 V^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^8 & 0 \\ 0 & 2^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12866 & 12610 \\ -6305 & -6049 \end{bmatrix}$$

(b) Väite seuraa laskemalla: $B\mathbf{x} = A^2\mathbf{x} + A\mathbf{x} = A(\lambda\mathbf{x}) + \lambda\mathbf{x} = \lambda A\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x} = \lambda \cdot \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x} = (\lambda^2 + \lambda)\,\mathbf{x}$.