Tehtävä 1

a)

$f(x) = \sin(1-x^2)$, kolmannen asteen Taylorin polynomi kohdassa $x = 1$ on

$$f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{6}f'''(1)(x-1)^3$$

Nyt on $f(1) = 0$, $f'(1) = -2$, $f''(1) = -2$ ja $f'''(1) = 8$, josta polynomi

$$-2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3.$$

Toinen tapa: sijoita $x - 1 = t$, josta $f(x) = f(t+1) = g(t)$ ja laske g :n Taylorin polynomi kohdassa $t = 0$.

b)

Hospitalin säännöllä:

$$\frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)} \to 1 + \frac{x\cos(x)}{\sin(x)} \to 1 + \frac{\cos(x) - x\sin(x)}{\cos(x)} \to 2.$$

Toinen tapa: Taylorin polynomi, eli:

$$\frac{x(x - x^3/3! + O(x^5))}{1-(1-x^2/2+O(x^4))} = \frac{x^2(1+O(x^2))}{x^2/2(1+O(x^2)} \to 2$$

kun $x \to 0$.

Tehtävä 2

a)

$$\int_1^e x(\ln x)^2 \mathrm{d}x = |_1^e x^2(\ln x)^2/2 - \int_1^e x\ln x \mathrm{d}x,$$

jossa

$$\int_1^e x\ln x \mathrm{d}x = |_1^e x^2(\ln x)/2 - \int_1^e x/2.$$

Yhdistämällä tulokset saadaan vastaukseksi

$$e^2/2 - (e^2/2 - (e^2/4 - 1/4))) = (e^2-1)/4.$$

b)

Osamurrolla saadaan

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{x^2+5x+4}\mathrm{d}x &= \int \frac{3x+1}{(x+1)(x+4)} = \int \frac{-2/3}{x+1} + \frac{11/3}{x+4}\mathrm{d}x \\ &= (-2/3)\ln|x+1| + (11/3)\ln|x+4| + C.\end{aligned}$$

Tehtävä 3

a)

Puolisuunnikassääntö, kun väli $[1,2]$ on jaettu neljään yhtäpitkään osaväliin, antaa

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln(1+x)\mathrm{d}x &\approx \frac{1}{4}(f(1)/2+f(5/4)+f(3/2)+f(7/4)+f(2)/2 \\ &= \frac{1}{4}((\ln 2)/2+\ln(9/4)+\ln(5/2)+\ln(11/4)+(\ln(3))/2) \\ &= \frac{1}{4}\ln(\sqrt{6}\frac{495}{32}) \approx 0.90868\end{aligned}$$

b)

Derivaatat parametrix t suhteen: $\dot{x}=t\cos t$ ja $\dot{y}=t\sin t$, josta $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=t$ ja saadaan pituudeksi

$$\int_0^{2\pi} t\mathrm{d}t = 2\pi^2$$

Tehtävä 4

a)

$r(\theta)=2\sin 2\theta = 4\sin\theta\cos\theta$, josta saadaan $r^3=4(r\sin\theta)(r\cos\theta)$ eli

$$(x^2+y^2)^{3/2}=4xy.$$

Ensimmäisessä neljänneksessä suorat $\theta=\pi/6$ ja $\theta=\pi/3$ rajaavat käyrän $r=r(\theta)$ kanssa alan

$$\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} r(\theta)^2\mathrm{d}\theta = 2\int_{\pi/6}^{\pi/3}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta = \pi/6.$$

Lisäksi kolmannessa neljänneksessä suorat rajaavat samansuuruisen alan eli yhteisalaksi tulee $\pi/3$. Arvostelussa hyväksytään molemmat vastaukset.

b)

Tason $3x-y+4z=1$ normaalivektori on $\bar{n}=(3,-1,4)=\bar{v}$, joka toimii siis pisteen $P=(1,2,3)$ kautta kulkevan suoran suuntavektorina. Tällöin suoran yhtälö parametrimuodossa on $\bar{r}(t)=(1,2,3)+t(3,-1,4)$ eli

$$\begin{aligned}x &= 1+3t \\ y &= 2-t \\ z &= 3+4t.\end{aligned}$$

Pisteen $P_1 = (0, 0, 2)$ etäisyys tästä suorasta on

$$d = \frac{|(\bar{r}_1 - \bar{r}_0) \times \bar{v}|}{|\bar{v}|},$$

jossa $\bar{r}_1$ on pisteen P_1 ja $\bar{r}_0$ pisteen P paikkavektori. Sijoittamalla saadaan tulos

$$d = \sqrt{\frac{131}{26}} \approx 2.2447.$$

Pisteytys:

1a)	3p
1b)	3p
2a)	3p
2b)	3p
3a)	3p
3b	3p
4a)	3p
4b)	3p